PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2024. február 10.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI – ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2024. február 10.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS

– KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1. Egyszerűsítse az alábbi kifejezést, ahol $x \neq 3$!

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

(2 pont)

Megoldás:

A számlálót a gyöktényezős alak használatával szorzattá alakítjuk, így egyszerűsíteni tudunk:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)}$$

Az egyszerűsített eredmény: $\boldsymbol{x-2}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

2. Adja meg az $\overline{A} \cap B$ halmazművelet eredményét az elemek felsorolásával, ha…

$A = \{$**0-nál nagyobb pozitív egyjegyű páros számok**$\}$

$B = \{$**30-nál kisebb pozitív négyzetszámok**$\}$ **(3 pont)**

Megoldás:

Az *A* halmaz elemei: 2; 4; 6; 8.

A *B* halmaz elemei: 1; 4; 9; 16; 25.

A halmazműveletek elvégzése után: $\overline{A} \cap B = \{1; 9; 16; 25\}$. (3 pont)

Összesen: 3 pont

3. Szabika kedvenc étele a gyros sült krumplival. Törzshelyére érve örömmel realizálta, hogy az eredetileg 1390 Ft-os gyros ára 10%-kal, valamint a 799 Ft-os sült krumpli ára 8%-kal lett alacsonyabb. Ezen a tényen felbuzdulva rögtön két adagot (egy adagnak tekintünk egy gyrost és egy sült krumplit együttesen) vett magának. Hány forinttal fizetett így kevesebbet az eredeti árakhoz képest? Megoldását részletezze, valamint válaszát egész számra kerekítse! **(4 pont)**

Megoldás:

Sült krumpli új ára: $799 \cdot 0,92 = 735,08\,\text{Ft}$. (1 pont)

Gyros új ára: $1390 \cdot 0,90 = 1251\,\text{Ft}$. (1 pont)

Az így megtakarított összeget az alábbi módon lehet kiszámítani:

$2 \cdot (1390 + 799) - 2 \cdot (1251 + 735,08) = 405,84\,\text{Ft}$. (1 pont)

Szabika tehát **406 Ft-ot tudott spórolni** a kedvezmény által. (1 pont)

Összesen: 4 pont

4. Létezik-e olyan gráf, amelyben a pontok fokszáma rendre: 4; 3; 3; 2; 2; 1? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Egy gráf fokszámainak összege mindig páros szám, mivel az élek számának kétszerese.(1 pont)

Példánkban viszont a fokszámok összege 15, ami egy páratlan szám, tehát **nem létezik ilyen gráf**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

5. Írja fel a 12 486-ot 8-as számrendszerben! (2 pont)

Megoldás:

$12486:8=1560$, maradék a 6

$1560:8=195$, maradék a 0

$195:8=24$, maradék a 3

$24:8=3$, maradék a 0

$3:8=0$, maradék a 3.

A maradékokat visszafelé olvasva megkapjuk, hogy $\mathbf{12486_{10}=30306_8}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

6. Hanna és Anna kutatást végeztek a 2023-as novemberi koncertjegyek áraival kapcsolatban. A nyolc kedvenc előadójuk koncertjére az egyes jegyárakat az alábbi táblázat tartalmazza:

Előadó neve	**Krumpli**	**Vas-Beton**	**ZAttila**	**Ördög**	**Kóma koma**	**Digital Balaton**	**Emanuel**
Jegyár (Ft)	**8 490**	**7 900**	**12 000**	**9 500**	**8 000**	**6 450**	**7 490**

Határozza meg a jegyárak alsó és felső kvartilisét! (2 pont)

Megoldás:

Definíció szerint az első és a harmadik kvartilist a sorbarendezett adatsor első, valamint második felének a középső tagja, vagy a középső tagok átlaga.

A sorbarendezett sokaság: 6450; 7490; 7900; 8000; 8490; 9500; 12000.

Az alsó kvartilis: **7490 Ft**. (1 pont)

A felső kvartilis: **9500 Ft**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

7. Egy dartstábla sugara 18 cm. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a pirosra festett részt találjuk el, ha annak területe 49,5 cm^2? (2 pont)

Megoldás:

A teljes dartstábla területe: $18^2\pi$. (1 pont)

(Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.)

A geometriai valószínűség klasszikus képletét használva: $\frac{49,5}{18^2\pi}\approx\mathbf{0,049}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

8. Határozza meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát a valós számok halmazán!

$$\frac{1}{\sqrt{x-4}}$$

(3 pont)

Megoldás:

Mivel a nevezőben egy gyökös kifejezés szerepel, ezért az értelmezési tartományunk a következő lenne: $x \geq 4$.

Azonban tört nevezője nem lehet 0, hiszen a 0-val való osztást nem értelmezzük.

Az értelmezési tartományok metszete: $\boldsymbol{x > 4}$. (3 pont)

Összesen: 3 pont

9. Árcsi, Kinga, Zsófi és Hanna közösen elmennek egy cukrászdába. Összesen 11-féle sütemény és 5-féle fagyi közül választhatnak. Hányféleképpen tudják kiválasztani, hogy ki mit kér, ha mindannyian mást választanak, illetve Zsófi biztosan fagyit, a többiek pedig süteményt választanak? (2 pont)

Megoldás:

A feladat szövege alapján Zsófi biztosan fagyit választ, ezt 5-féleképpen teheti meg. Árcsi, Kinga és Hanna rendre különböző süteményt választanak, Árcsi 11-féléből, Kinga 10-féléből, Hanna pedig a maradék 9-ből. (1 pont)

(Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.)

A lehetőségek száma tehát: $5 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \mathbf{4950}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

Alternatív megoldás:

A feladat szövege alapján Zsófi biztosan fagyit választ, ezt $\binom{5}{1}$-féleképpen teheti meg. Árcsi, Kinga és Hanna 11 különböző süteményből 3-at választanak, amit $\binom{11}{3}$-féleképpen tudnak megtenni. (1 pont)

(Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.)

A három kiválasztott süteményből 3!-féleképpen dönthetnek, hogy kihez melyik édesség jut.

A lehetőségek száma tehát: $\binom{5}{1} \cdot \binom{11}{3} \cdot 3! = \mathbf{4950}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

10. Andris minden egyes nap elmegy futni. Az egyik héten hétfőtől kezdve minden nap feljegyezte, hogy mennyi idő alatt teszi meg az 5 km-es távot. Megfigyelései alapján minden nap 15,5 másodperccel javult az ideje. Mennyi időt töltött el futással összesen a héten, ha a szerdai ideje 49 perc 29 másodperc, a pénteki ideje pedig 48 perc és 58 másodperc volt? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A futott távok idejei egy számtani sorozatot alkotnak, ahol $a_3 = 49 \cdot 60 + 29 = 2969$ másodperc, $a_5 = 48 \cdot 60 + 58 = 2938$ másodperc, valamint $d = -15{,}5$ másodperc. (1 pont)

$a_1 = a_3 - 2d = 2969 + 31 = 3000$ (1 pont)

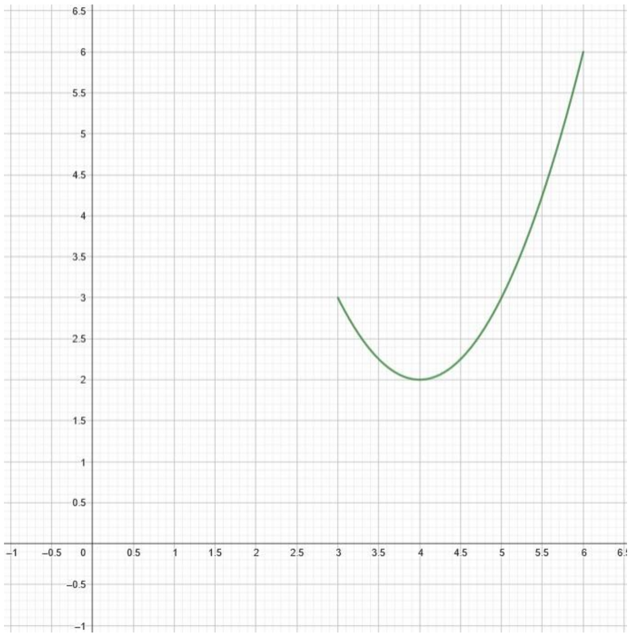
A számtani sorozat összegképlete alapján:

$S_7=\frac{n\left(a_1+a_1+(n-1)d\right)}{2}=\frac{7\cdot\left(3000+3000+6\cdot(-15,5)\right)}{2}=20674,5$ másodperc, ami **344,575 perc**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

11. Ábrázolja a $g(x)=(x-4)^2+2$ függvényt az $x\in[3;6]$ intervallumon! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

12. Egy családban két háziállat van, egy Shiba inu kutya és egy Maine coon cica, akik nagyon jó barátok. Hány évesek voltak öt éve az állatok, ha a kutyus öt év múlva hétszer annyi idős lesz, mint a cica volt öt évvel ezelőtt, illetve öt év múlva életkoruk összege 26 év lesz? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

Az adatokat táblázatban összefoglalva:

	5 éve	Most	5 év múlva
Shiba inu kutya	$7x-10$	$7x-5$	$7x$
Maine coon cica	x	$x+5$	$x+10$

(1 pont)

A feladat szövege alapján: $7x+x+10=26$, vagyis $x=2$. (1 pont)

A **Shiba inu kutyus 5 évvel ezelőtt** $14-10=$ **4 éves**, a **Maine coon cica 2 éves volt**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13. Oldja meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $5x^6-35x^3-28=12$ **(6 pont)**

b) $(x-6)^2-4\leq 54-(x-2)^2$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) Mivel az egyenletünk az x^3-ra nézve másodfokú, így be tudunk vezetni egy új ismeretlent: $x^3=a$. (1 pont)

Így a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $5a^2-35a-40=0$.

A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva a következőt kapjuk:

$$x_{1;2}=\frac{35\pm\sqrt{(-35)^2-4\cdot5\cdot(-40)}}{2\cdot5}=\frac{35\pm\sqrt{1225+800}}{10}=\frac{35\pm45}{10}$$

Innen $a_1=-1$ és $a_2=8$. (2 pont)

Visszahelyettesítve pedig megkapjuk, hogy $x_1^{\,3}=-1$, vagyis $\boldsymbol{x_1=-1}$ és $x_2^{\,3}=8$, vagyis $\boldsymbol{x_2=2}$. (2 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) Első lépésként bontsuk fel a zárójeleket: $x^2-12x+36-4\leq 54-x^2+4x-4$. (1 pont)

Rendezzük az egyenlőtlenséget 0-ra: $2x^2-16x-18\leq 0$. (1 pont)

A másodfokú megoldóképletet használva megkapjuk, hogy a két zérushely, ahol a kifejezésünk előjelet vált $x_1=-1$ és $x_2=9$ helyen van. (1 pont)

Mivel a kifejezésünk függvényként ábrázolva egy felfelé nyíló parabola és a feladat megengedi az egyenlőséget is, ezért a végső megoldásunk $\boldsymbol{x\in[-1;9]}$ lesz. (2 pont)

Összesen: 11 pont

14. Egy állatkert dolgozói a vörös macskamedvéknek szánt eledel mennyiségét egy napra az alábbi képlettel határozzák meg: $13\lg P+\lg p+(15{,}6976-\lg p)^2$, ahol *P* a kifejlett felnőtt vörös macskamedvék, míg *p* a még fejlődésben lévő állatok számát jelöli.

a) Hány felnőtt vörös macskamedve található az állatkertben, ha 100 kölyök van és tegnap 214 kg eledelt adtak nekik? (4 pont)

A legutóbb született 12 kölyök a múlt hónapban esett át az első orvosi vizsgálaton, ahol a súlyukat is megmérték: 2,8 kg, 3,33 kg, 4,56 kg, 7,5 kg, 6,67 kg, 3,97 kg, 5,55 kg, 7,89 kg, 4,88 kg, 4,39 kg, 6,02 kg és 6,43 kg.

b) Szemléltesse az adatokat egy dobozdiagram segítségével, valamint adja meg az adatok számtani átlagát! A válaszokat két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

Adott az alábbi állítás: *„Minden vörös macskamedve kölyöknek Cili a kedvenc állatkerti gondozója."*

c) Fogalmazza meg az állítás tagadását! (2 pont)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy $p=100$, valamint az eledel mennyisége 214 kg, így a következő egyenletet írhatjuk fel a feladat szövege alapján: $13\lg P+\lg100+(15{,}6976-\lg100)^2=214$. (1 pont)

A zárójelet felbontva és az egyenletet rendezve a következőt kapjuk: $13\lg P = 24,3758$.

Innen $\lg P = 1,8751$. (2 pont)

A logaritmus definíciója alapján $P = 10^{1,8751}$, vagyis $P = 75$. Tehát **75 felnőtt vörös macskamedve található az állatkertben**. (1 pont)

b) A sokaság átlaga:

$$\frac{2,8+3,33+4,56+7,5+6,67+3,97+5,55+7,89+4,88+4,39+6,02+6,43}{12} = \frac{63,99}{12} = \mathbf{5,33}.$$

(1 pont)

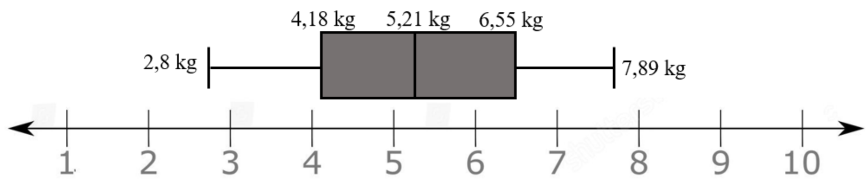
A dobozdiagram felrajzolásához szükségünk lesz a következő adatokra: legkisebb és legnagyobb adat, alsó és felső kvartilis, valamint a sokaság mediánja. Ehhez rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe az adatokat:

2,8 kg, 3,33 kg, 3,97 kg, 4,39 kg, 4,56 kg, 4,88 kg, 5,55 kg, 6,02 kg, 6,43 kg, 6,67 kg, 7,5 kg és 7,89 kg (1 pont)

A legkisebb adat 2,8 kg, a legnagyobb 7,89 kg, míg a medián a hatodik és hetedik ismérvérték számtani átlaga, vagyis $\frac{4,88+5,55}{2} = 5,215$. (2 pont)

Az alsó kvartilis a harmadik és negyedik ismérvérték számtani átlaga, vagyis: $\frac{3,97+4,39}{2} = 4,18$ kg, míg a felső kvartilis a kilencedik és tizedik ismérvérték számtani átlaga, vagyis: $\frac{6,43+6,67}{2} = 6,55$ kg lesz. (1 pont)

Innen már fel tudjuk rajzolni a dobozdiagrammunkat:



(1 pont)

c) Az állítás tagadása: **„Van olyan vörös macskamedve kölyök, akinek nem Cili a kedvenc állatkerti gondozója.”** vagy **„Nem minden vörös macskamedve kölyöknek Cili a kedvenc állatkerti gondozója.”** (2 pont)

Összesen: 12 pont

15. Egy egyenlőszárú trapéz alapjai 14 és 4 cm hosszúak. A hosszabbik alapon fekvő szögek nagysága $30°$.

a) Mekkorák a trapéz átlói? (3 pont)

Adott egy *ABC* háromszög, melynek csúcsai egy körre illeszkednek. A *BC* oldal hossza 3 cm, az *AC* oldal hossza pedig 4 cm.

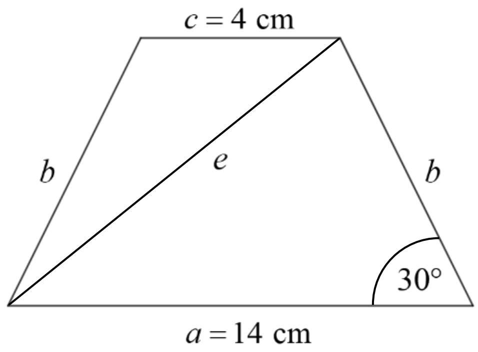
b) Bizonyítsa be, hogy a háromszög leghosszabb oldalának hossza megegyezik a kör átmérőjének hosszával, ha a háromszög *B* csúcsánál lévő szög $53,13°$-os! (4 pont)

Egy 120 fős évfolyam számára 3 különböző programot szerveznek: egy pókerestet, egy jelmezes bulit és egy kirándulást Csókakőre. A pókeresten 90-en, a jelmezes bulin 45-en, a kiránduláson pedig 70-en vettek részt. Az évfolyam 12,5 százaléka vett részt mindhárom programon, illetve nem volt olyan diák, aki egyik programon sem vett részt.

c) Hányan vettek részt a jelmezes bulin és a kiránduláson, de a pókeresten nem, ha a jelmezes bulin és a pókeresten 32-en voltak, illetve azon tanulók száma, akik a pókeresten és a kiránduláson is megjelentek, megegyezik azoknak a számával, akik a jelmezes bulin vettek részt? (6 pont)

Megoldás:

a) Szemléltessük az adatainkat egy ábrán.



Első lépésként szükségünk lesz a trapéz oldalának hosszúságára, amit egy szögfüggvény segítségével kapunk meg: $\cos 30° = \frac{5}{b}$, ahonnan $b = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5{,}7735$ cm. (1 pont)

A trapéz átlóját koszinusztétel segítségével tudjuk kiszámolni, ahol a háromszög két ismert oldala a trapéz oldala és nagyobbik alapja, a szemközti szög pedig a $30°$. Tehát:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30°$$

$$e^2 = 196 + \frac{100}{3} - 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 14 \cdot \cos 30°$$

$$e^2 = \frac{268}{3}$$

$e = 9{,}4516$ (1 pont)

Tehát a trapéz átlói **9,4516 cm** hosszúságúak. (1 pont)

b) A feladat szövege alapján felírhatunk egy szinusztételt, amivel ki tudjuk számolni az A csúcsnál lévő szög nagyságát:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$$

$$\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 53{,}13°}$$

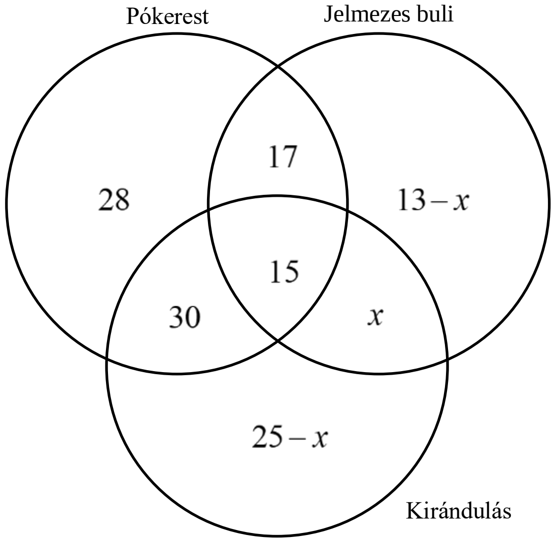
$\sin\alpha = 3 \cdot \frac{\sin 53{,}13°}{4}$ (1 pont)

$\alpha_1 = 36{,}87°$ és $\alpha_2 = 143{,}13°$, ahonnan csak α_1 lesz nekünk a jó megoldás, mivel a háromszög belső szögeinek összege $180°$. (1 pont)

Innen tudjuk, hogy a harmadik szög nagysága $180° - 53{,}13° - 36{,}87° = 90°$, vagyis a háromszög derékszögű, ahol a leghosszabb oldal az AB oldal lesz. (1 pont)

A Thalész-tétel alapján a derékszögű háromszög köré írt kör középpontja megegyezik a háromszög átfogójának felezőpontjával, tehát innen tudjuk, hogy az említett háromszög esetén a leghosszabb oldalának hossza megegyezik a kör átmérőjének hosszával. **Ezzel az állítást bebizonyítottuk**. (1 pont)

c) Az ismert adatokat ábrázoljuk egy Venn-diagram segítségével.



Mindhárom programon a 120 fős évfolyam 12,5 százaléka, vagyis 15 fő vett részt. (1 pont)

Mivel a jelmezes bulin és a pókeresten 32-en vettek részt, ezért azoknak a száma, akik csak ezen a két programon vettek részt, de a kiránduláson nem $32-15=17$ fő.

A pókeresten és a kiránduláson 45-en vettek részt, vagyis akik csak ezen a két programon vettek részt, de a jelmezes bulin nem $45-15=30$ fő.

Akik csak a pókeresten vettek részt, ők $90-15-17-30=28$-an vannak. (2 pont)

Innen a maradék 3 részhalmaz a következőképpen írható fel: csak a jelmezes bulin és a kiránduláson x fő, csak a jelmezes bulin $13-x$ fő, csak a kiránduláson $25-x$ fő. (1 pont)

Mivel az évfolyam 120 fős, ezért $13-x+x+25-x=30$, vagyis $x=8$. (1 pont)

Tehát **8-an** vettek részt csak a jelmezes bulin és a kiránduláson, de a pókeresten nem. (1 pont)

Összesen: 13 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16. Egy banknál befektetésünk havonta 3%-os kamatos kamattal növekszik.

a) A fenti kamatfeltételek mellett mennyi pénzt kell befektetnünk a bankba, hogy 3 és fél év múlva átlépje a 2 millió forintot a befektetés értéke, ha a kamatot mindig hónap végén írják jóvá és befektetésünket 100 forintonként tudjuk növelni? (3 pont)

Timó a múlt hónapban kinézte álomlakását, melynek ára 135 460 000 Ft. A lakás megvásárlásához Timó 100 millió Ft hitelt szeretne felvenni, melyhez a következő ajánlatot kapta: Timónak 25 éven keresztül kell minden év végén egy azonos összeget befizetnie évi 7 százalékos kamattal.

b) Mekkora törlesztőrészletet kell fizetnie Timónak eszerint a konstrukció szerint, ha a kamatot minden év elején írják jóvá? (6 pont)

Timó a luxuslakás mellé egy luxusautót kap ajándékba, melyre egyedi rendszámot szeretne rakatni. Tudja, hogy rendszáma két betűből és hat számjegyből fog állni. A számsorból a következő számjegyeket ismerjük eddig: $\overline{34x81y}$.

c) Milyen számjegyeket írhatunk x és y helyére, ha tudjuk, hogy a hatjegyű szám osztható 15-tel? (4 pont)

Timó új hobbija a szerencsejáték, azon belül is a kockajátékok. A kedvenc játékát akkor nyeri meg, ha két szabályos dobókockával dobva a dobott értékek összege kevesebb, mint 10.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Timó nyer? (4 pont)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy a havi kamatunk nagysága $p = 3\%$, illetve 3 és fél éven keresztül kamatozik befektetésünk, ami 42 hónap, vagyis $n = 42$, valamint $T_{42} \geq 2$ millió Ft. (1 pont)

A kamatos kamat képlete alapján felírhatjuk, hogy $2 \text{ millió} \leq T_0 \cdot \left(\frac{100+3}{100}\right)^{42}$. (1 pont)

Innen $T_0 \geq 577918{,}4481$, vagyis **578 000 Ft-ot** kell befizetnünk. (1 pont)

b) Tudjuk, hogy a felvett hitel 100 millió Ft, mely 25 éven keresztül kamatozik, évi 7 százalékos kamattal. A törlesztőrészlet értékét úgy kell meghatároznunk, hogy a 25. év végére a hitelből fennmaradó összeg 0 Ft legyen. (1 pont)

Az első év végén tehát a fennmaradó összeget a következőképpen írhatjuk fel: $100 \text{ millió} \cdot 1{,}07 - a$, ahol a a törlesztőrészletet jelenti. (1 pont)

A második év végére a fennmaradó összeg $(100 \text{ millió} \cdot 1{,}07 - a) \cdot 1{,}07 - a$, míg a harmadik év végére $\left[(100 \text{ millió} \cdot 1{,}07 - a) \cdot 1{,}07 - a\right] \cdot 1{,}07 - a$ lesz a fennmaradó összeg.

Ezt a zárójelek felbontásával a következőképpen tudjuk átírni:

$100 \text{ millió} \cdot 1{,}07^3 - a \cdot \left(1{,}07^2 + 1{,}07 + 1\right)$ (1 pont)

Itt észrevehetjük, hogy a zárójelben lévő kifejezés egy mértani sorozat összege, ahol $a_1 = 1$ és $q = 1{,}07$. (1 pont)

Ezek alapján a következő összefüggést tudjuk felírni:

$$100 \text{ millió} \cdot 1{,}07^{25} - a \cdot \frac{1{,}07^{25} - 1}{1{,}07 - 1} = 0$$

$a = 8581051{,}72$ (1 pont)

Vagyis Timónak évi **8 581 051,72 Ft-ot** kell fizetnie. (1 pont)

c) Egy szám akkor osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel is. (1 pont)

Ez alapján *y* értéke lehet 0 vagy 5. (1 pont)

Ha $\boldsymbol{y = 0}$, akkor a számjegyek összege 16, vagyis $\boldsymbol{x \in \{2;5;8\}}$. (1 pont)

Ha $\boldsymbol{y = 5}$, akkor a számjegyek összege 21, vagyis $\boldsymbol{x \in \{0;3;6;9\}}$. (1 pont)

d) Mivel a dobások összege nagyon sokféleképpen lehet kevesebb, mint 10, ezért komplementer halmazzal számolunk.

A kedvezőtlen dobások esetén a dobott számok összege lehet 10, ha 6-ost és 4-est vagy két 5-öst dobunk, lehet 11, ha 6-ost és 5-öst dobunk vagy lehet 12, ha két 6-ost dobunk. Ez összesen 6 különböző eset. (1 pont)

Az összes esetek száma $6 \cdot 6 = 36$. (1 pont)

Innen a keresett valószínűség $P = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$. (1 pont)

Vagyis Timó nyerési esélye $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

17. Bori üzleti vállalkozásba kezdett, ahol különböző kávékülönlegességeket és egyéb italokat árul. A héten eladott italok darabszámát, alapanyagárát és haszonkulcsát[1] a következő táblázat tartalmazza:

Ital	Eladott mennyiség (db)	Alapanyagár (Ft/db)	Haszonkulcs (%)
Zanzibári latte	105	300	200
Francia rumos-diós kávé	87	450	250
Svéd keserű cappucino	63	423	175
Olasz cortado	122	280	225
Rebarbarás shake	96	489	205
Bodzás limonádé	73	320	180

a) Mennyi Bori üzletének heti nyeresége és melyik itallal szerezte a legnagyobb hasznot? (5 pont)

Négy barátnő, Anna, Bogi, Csilla és Dorina megbeszélik, hogy közösen elmennek Bori üzletébe. Ha a lányok lakhelyeit sorra *A, B, C,* illetve *D* pontokkal ábrázoljuk egy közös koordináta-rendszerben, akkor egy paralelogrammát kapunk. Az alakzat 3 csúcsának koordinátáját, valamint egyik oldalának egyenletét ismerjük, melyek a következők:

[1] A haszonkulcs azt mutatja meg, hogy mekkora a nyereség a beszerzési árhoz viszonyítva. Például, ha a haszonkulcs 20%, az alapanyagár pedig 100 Ft, akkor az adott termék nyeresége 20 Ft.

$A(2;1)$, $B(7;1)$, $C(8;4)$ és az AD oldal egyenlete $y = 3x - 5$. Bori üzlete pont az AB oldal felezőpontjában helyezkedik el.

b) Hány egység távolságra laknak a lányok Bori üzletétől? (8 pont)

Bori most már házhozszállítást is vállal kávézójából. A rendeléseket motorral vagy kerékpárral szállítják ki a vevőkhöz. A motoros kiszállítás átlagosan 27 km/órával gyorsabb a biciklis kiszállításnál. Tomihoz a biciklis rendelés 20 perccel később érkezik meg, mintha motorral szállították volna ki italát.

c) Milyen messze lakik Tomi, ha a biciklis futár átlagosan 17 km/órás sebességgel teker? (4 pont)

Megoldás:

a) Az egyes italok nyereségeit úgy kapjuk meg, hogy az alapanyagárat megszorozzuk a haszonkulccsal. Ekkor az egyes nyereségek a következőképpen alakulnak:

Ital	Nyereség (Ft/db)
Zanzibári latte	600
Francia rumos-diós kávé	1125
Svéd keserű cappucino	740,25
Olasz cortado	630
Rebarbarás shake	1002,45
Bodzás limonádé	576

(2 pont)

Innen a heti nyereséget úgy kapjuk meg, hogy mindegyik nyereséget megszorozzuk az eladott mennyiséggel: $600 \cdot 105 + 1125 \cdot 87 + 740,25 \cdot 63 + 630 \cdot 122 + 1002,45 \cdot 96 + 576 \cdot 73 = 422653,95$.

(1 pont)

Ezek közül a francia rumos-diós kávénál kapjuk a legnagyobb szorzatot, vagyis Bori **heti nyeresége 422 653,95 Ft, a legnagyobb hasznot pedig a francia rumos-diós kávéval szerezte**.

(2 pont)

b) Bori üzletének koordinátái: $x = \frac{2+7}{2} = 4,5$ és $y = \frac{1+1}{2} = 1$. (1 pont)*

Dorina lakhelyét úgy kaphatjuk meg, ha megnézzük az AD oldal és CD oldal egyenletének metszéspontját. Tudjuk, hogy AD oldal egyenlete $y = 3x - 5$, illetve azt is, hogy CD oldal párhuzamos AB oldallal, ezért CD oldal egyenlete $y = 4$. (1 pont)*

Innen Dorina lakhelyének koordinátáit a következő egyenletrendszer segítségével kaphatjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Innen $x = 3$ és $y = 4$. (1 pont)*

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a tanuló a D pont koordinátáit a koordináta-rendszer segítségével, a paralelogramma tulajdonságaira hivatkozva állapítja meg.*

Két pont távolságát a következő egyenlettel adhatjuk meg: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.(1 pont)

Innen a négy távolság:

Anna: $d=\sqrt{(4,5-2)^2+(1-1)^2}=$ **2,5 egység**. (1 pont)

Bogi: $d=\sqrt{(4,5-7)^2+(1-1)^2}=$ **2,5 egység**. (1 pont)

Csilla: $d=\sqrt{(4,5-8)^2+(1-4)^2}=$ **4,6098 egység**. (1 pont)

Dorina: $d=\sqrt{(4,5-3)^2+(1-4)^2}=$ **3,3541 egység**. (1 pont)

c) Tudjuk, hogy $v=\frac{s}{t}$, illetve ebből következik, hogy $s=v\cdot t$. (1 pont)

Foglaljuk az adatokat táblázatba:

	Távolság (km)	Sebesség (km/óra)	Kiszállítási idő (óra)
Motor	s	$17+27=44$	t
Bicikli	s	17	$t+\frac{1}{3}$

(1 pont)

Innen a következő egyenletrendszert tudjuk felírni:

$$\left.\begin{aligned} s&=44t\\ s&=17t+\frac{17}{3}\end{aligned}\right\}$$

Ahonnan $44t=17t+\frac{17}{3}$, vagyis $t=\frac{17}{81}\approx 0,2099$. (1 pont)

Innen $s=\frac{748}{81}\approx 9,2346\text{ km}$, vagyis Tomi **9,2346 km-re** lakik az üzlettől. (1 pont)

Összesen: 17 pont

18. Egy játékokat gyártó cég amorf formájú plüss tukánokat is értékesít. A plüssök összesen három darabból állnak, melyeket külön töltenek meg, majd töltés után varrják őket össze. A madár feje gömb alakú, a csőrét egy négyzet alapú gúla, míg testét egy henger alkotja.

a) A madár csőrét egy speciális illatosított anyaggal töltik meg, melynek ára 2600 Ft/dm^3. Mennyibe kerül 250 csőr kitömése, ha a gúla oldaléle 4 cm és alapjának átlója $3\sqrt{2}$ cm? (6 pont)

A plüssök testét és fejét a töltés után, de még az összevarrás előtt fehér és fekete anyaggal borítják be, méghozzá úgy, hogy a test egésze fekete, a feje pedig félig fekete és félig fehér.

A fejet alkotó gömb átmérője 6 cm, ami megegyezik a testet alkotó henger átmérőjével. Tudjuk továbbá, hogy a fej felszíne $\frac{3}{10}$-e a test felszínének.

b) Hány cm^2 anyag szükséges az egyes színekből egy plüss elkészítéséhez, ha a varrás miatt 5 százalék anyaghulladék keletkezik mindkét színből egyesével? (5 pont)

A játékokat gyártó cég minden évben minőség-ellenőrzést hajt végre az amorf tukánok között. A kész plüssök között 30 százalék eséllyel találnak olyan állatot, melynek hibás a csőre.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 150 kiválasztott játék közül pontosan 25 lesz olyan, melynek a csőre amorfabb lett a kelleténél? (4 pont)

A játékboltba, ahol a tukánokat is értékesítik, egy négygyermekes családanya tér be, hogy a 18-féle játék közül minden gyerekének válasszon egyet-egyet.

d) Hányféleképpen választhatja ki a gyerekeknek a játékokat, ha életkor szerint növekvő sorrendben választ nekik és mindenkinek különbözőt? (2 pont)

Megoldás:

a) A csőr térfogatának kiszámításához szükségünk lesz a gúla alapjának hosszára és a magasságára. (1 pont)

Az alap hossza az átló $\sqrt{2}$-e, vagyis $a = 3$ cm. (1 pont)

A magasságot egy Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk meg, ahol az átfogó a gúla oldaléle, a befogók pedig a magasság és az alaplap átlójának fele: $m^2 = b^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2$, vagyis $m^2 = 4^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$, ahonnan $m = \frac{\sqrt{46}}{2} \approx 3,3912$ cm. (1 pont)

Innen a csőr térfogata $V = \frac{a^2 \cdot m}{3} = \frac{3^2 \cdot 3,3912}{3} = 10,1735$ cm^3. (1 pont)

Ez 250 db-ra nézve $2543,3737$ cm^3, ami $2,5434$ dm^3. (1 pont)

Vagyis 250 db csőr kitömése $2600 \cdot 2,5434 =$ **6612,7717 Ft**. (1 pont)

b) A fej felszíne $A = \pi \cdot d^2 = 36\pi$ cm^2. (1 pont)

Ennek a fele fehér, a másik fele fekete színű, vagyis a fehér anyagból $18\pi \approx 56,5487$ cm^2 és a fekete anyagból szintén ennyi szükséges. (1 pont)

Mivel a fej felszíne a test felszínének $\frac{3}{10}$-e, ezért a test felszíne $A = 36\pi : \frac{3}{10} = 120\pi$ cm^2, ami $120\pi \approx 376,9911$ cm^2 fekete anyagot jelent. (1 pont)

A fehér anyagból a hulladékkal együtt tehát $\frac{18\pi}{0,95} = \frac{360}{19}\pi \approx \mathbf{59,5249\ cm^2}$ szükséges, míg a fekete anyagból hulladékkal együtt $\frac{18\pi + 120\pi}{0,95} = \frac{2760}{19}\pi \approx \mathbf{456,3577\ cm^2}$ szükséges. (2 pont)

c) A feladatot binomiális eloszlással tudjuk kiszámolni. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy plüss csőre hibás $p_{\text{h}} = 0,3$, tehát annak a valószínűsége, hogy nem hibás $p_{\text{nh}} = 1 - 0,3 = 0,7$. (1 pont)

A binomiális tétel alapján: $P = \binom{150}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{125} = 7,1905 \cdot 10^{-5}$. (1 pont)

Vagyis a keresett valószínűség $\mathbf{7,1905 \cdot 10^{-5}}$. (1 pont)

d) $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73440$ (1 pont)

Vagyis **73 440-féleképpen**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34 pont