PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. február 10.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Javítási útmutató

2024. február 10.

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA SZEKCIÓ

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2+3x-1+\dfrac{1}{x^2+3x-3}=4$ **(5 pont)**

b) $\log_2\left(x^2-1\right)-\log_2\left(-2x+x^2-3\right)=1$ **(8 pont)**

Megoldás:

a) Ki kell kötni a tört nevezőjére: $x^2+3x-3\neq 0$, ebből $x\neq\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$. (1 pont)

Az x^2+3x-1 polinomra bevezethetünk egy új ismeretlent, ami legyen a. Ekkor az egyenlet átírható $a+\dfrac{1}{a-2}=4$ alakra. (1 pont)

Az egyenletet rendezve:

$$a^2-2a+1=4a-8.$$

$$a^2-6a+9=0.$$ (1 pont)

Az egyenlet gyöke: $a=3$, ezt visszahelyettesítve a polinomba: $x^2+3x-1=3$. Ebből:

$x^2+3x-4=0$, ennek a gyökei: $x_1=1$, és $x_2=-4$. (1 pont)

Mindkét x eleme az értelmezési tartománynak, és ellenőrizve is teljesül az egyenlőség, ezért az egyenlet két megoldása az **1** és a **-4**. (1 pont)

b) Ki kell kötni a logaritmus numerusaira: $x^2-1>0$ és $-2x+x^2-3>0$, ezekből $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$. (2 pont)

Használva a logaritmus azonosságait, átírhatjuk az egyenletet:

$$\log_2\left(\frac{x^2-1}{-2x+x^2-3}\right)=\log_2 2.$$ (2 pont)

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt az alapok elhagyhatók. (1 pont)

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}=2$$

A számlálót átalakítva a nevezetes azonosság alapján, valamint a nevezőt gyöktényezős alakban felírva le tudunk egyszerűsíteni $(x+1)$-gyel: (1 pont)

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=2$$

$$\frac{x-1}{x-3}=2$$ (1 pont)

Mindkét oldalt $(x-3)$-mal megszorozva, majd x-re rendezve az egyenlet megoldása $\boldsymbol{x=5}$, ami a kikötésnek is megfelel és ellenőrizve is teljesül az egyenlőség. (1 pont)

Összesen: 13 pont

2. Máté, András, Bálint, Miklós és Zsombor nagyon szeretik a vizes sportokat. A közös sportolásra rendeltek fürdőnadrágokat, fejenként egyet (mindegyiket külön csomagban szállítják ki). A csomagokat összekészítő dolgozó gyakran kapkod, és a tapasztalatok alapján 0,18 valószínűséggel fürdőnadrág helyett fecskenadrágot csomagol.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt fiú egynél több fecske úszónadrágot kap kézhez? (4 pont)

A srácok az egyik hétvégén el is mennek úszni egy uszodába, és kibérelnek egy kinti és egy benti úszópályát. Mivel még mindenkinek dolga van aznap, ezért mindegyikőjük csak az egyik pályán fog úszni.

b) Hányféleképpen tudnak egymás után sorban úszni a két pályán összesen, ha egyszerre csak egy ember használ egy pályát? (4 pont)

Az 5 fiú ezután szavazást tart arról, hogy milyen sportot űzhetnének még együtt. A focit, a röplabdát és a kosárlabdát vetik fel ötletként. Minden sportágnak kijelölnek egy kalapot, ahova minden fiú egy cetlin leadja a szavazatát, hogy támogatja vagy ellenzi az adott ötletet. A szavazás során véletlenül összekeverednek a 3 kalapba tett szavazatok, csak azt tudjuk, hogy összesen 10 „támogatom” és 5 „ellenzem” szavazat érkezett.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy a focit megszavazták, ha egy sport csak akkor lesz megszavazott, ha legalább 4 „támogatom” szavazatot kapott? (5 pont)

Megoldás:

a) Komplementer eseménnyel számolva azt kell meghatározni, hogy mekkora valószínűséggel kaptak 0 vagy 1 fecske úszónadrágot, melyhez a binomiális eloszlás képletét alkalmazhatjuk. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 0 darab fecske úszónadrágot kaptak:

$$\binom{5}{0}\cdot(0,18)^0\cdot(0,82)^5=0,371.$$ (1 pont)

Annak a valószínűsége pedig, hogy 1 darabot: $\binom{5}{1}\cdot(0,18)^1\cdot(0,82)^4=0,407$. (1 pont)

Végül pedig a komplementer módszerrel számolva az alábbi egyenlet fogja megadni nekünk a valószínűséget: $1-0,371-0,407=\mathbf{0,222}$. (1 pont)

b) Az öt srác összesen 6 lehetőség közül választhat.

Az első opció során 5 ember úszik a benti pályán és 0 a kintiben, ez $\binom{5}{5}5!\cdot 1$-féleképpen fordulhat elő. A második opció során 4 ember úszik a benti pályán és 1 a kintiben, ez $\binom{5}{4}4!\cdot 1$-féleképpen fordulhat elő. A harmadik opció során 3 ember úszik a benti pályán és 2 a kintiben, ez $\binom{5}{3}3!\cdot 2!$-féleképpen fordulhat elő. A negyedik opció során 2 ember úszik a benti pályán és 3 a kintiben, ez $\binom{5}{2}2!\cdot 3!$-féleképpen fordulhat elő. Az ötödik opció során 1 ember úszik a benti pályán és 4 a kintiben, ez $\binom{5}{1}1\cdot 4!$-féleképpen fordulhat elő.

Végül pedig az utolsó opció során 0 ember úszik a benti pályán és 5 a kintiben, ez $\binom{5}{0}1\cdot 5!$-féleképpen fordulhat elő. (3 pont)

Ezeket összesítve tehát összesen:

$\binom{5}{5}5!\cdot 1+\binom{5}{4}4!\cdot 1+\binom{5}{3}3!\cdot 2!+\binom{5}{2}2!\cdot 3!+\binom{5}{1}1\cdot 4!+\binom{5}{0}1\cdot 5!=$ **720 -féleképpen** tudnak a két pályán úszni. (1 pont)

c) A focit akkor szavazták meg, ha 4, vagy 5 igennel szavaztak rá.

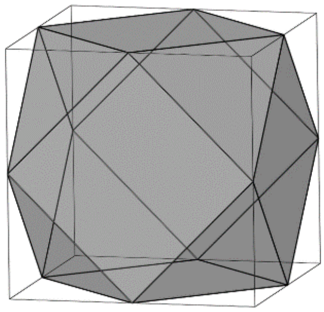
A hipergeometrikus eloszlást alkalmazva annak a valószínűsége, hogy 4-en szavaztak igennel $\dfrac{\binom{10}{4}\binom{5}{1}}{\binom{15}{5}}$, és annak, hogy 5-en $\dfrac{\binom{10}{5}\binom{5}{0}}{\binom{15}{5}}$. (3 pont)

Ezeket a különböző eseteket összeadva: $\dfrac{1050}{3003}+\dfrac{252}{3003}\approx 0,434$. (1 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy a focit megszavazták **0,434**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

3. A matematikában a félig szabályos testeket Arkhimédészi testeknek nevezzük. Egy ilyen Arkhimédészi testnek nevezzük a kuboktaédert is, amelynek lapjait 8 szabályos háromszög és 6 négyzet alkotja. (A test az ábrán látható.)



a) Hány éle és hány csúcsa van egy ilyen testnek?

(3 pont)

b) Ha a kuboktaéder minden éle 1 egység hosszúságú, akkor hány négyzetegység a felszíne és hány köbegység a térfogata egy ilyen testnek? **(9 pont)**

Megoldás:

a) A testben az élek két lapot, a csúcsok pedig négy lapot kapcsolnak össze. (1 pont)

A test 6 négyzetből és 8 háromszögből áll, viszont ezeket kétszer számoljuk, mivel egy él két lapot kapcsol össze, tehát $\frac{6\cdot 4+8\cdot 3}{2}=$ **24 éle** van a testnek. (1 pont)

A test 6 négyzetének 24 csúcsa van, a 8 háromszögnek is 24 csúcsa van, de ez összesen 48 csúcs, viszont ezeknek a negyede kell csak, mivel minden csúcsot négyszer számoltunk, tehát $\frac{6\cdot 4+8\cdot 3}{4}=$ **12 csúcsa van** összesen a testnek. (1 pont)

Megjegyzés: Ha a vizsgázó megszámolja az éleket és a csúcsokat, akkor azért 1-1 pont jár.

b) A test felszínét kiszámolhatjuk a testháló felhasználásával, amiben 6 db 1 egység oldalhosszúságú négyzet és 8 db 1 egység oldalhosszúságú háromszög van.

A 6 darab négyzet területe összesen 6 négyzetegység. (1 pont)

A háromszögekből 8 darab van, amiknek az oldalait és a szögeit is ismerjük, így a $\frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{2}$ területképletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy egy háromszög $\frac{1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ négyzetegység nagyságú. (1 pont)

Tehát összesen $8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+6\cdot 1=2\sqrt{3}+6\approx$ $\mathbf{9{,}46}$ **négyzetegység a felszíne**. (1 pont)

A test térfogata kiszámolható úgy, ha a kocka csúcsaiból gúlákat vágunk le, úgy, hogy a gúlák alapjának csúcsai a négyzet éleinek felezőpontjainak feleljenek meg. (2 pont)

Az eredeti nagy kocka térfogatának alapéle a kuboktaéder négyzetének az átlójával megegyezik, tehát $\sqrt{2}$ hosszúságú, vagyis $\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$ köbegységnégyzet. (1 pont)

A kockából le kell vonnunk 8 gúlát, amiből egynek a térfogata az alábbi:

$$V_{gúla}=\frac{T_{alaplap}\cdot M_{gúla}}{3}=\frac{\frac{a_{alaplap}\cdot m_{alaplap}}{2}\cdot M_{gúla}}{3}=\frac{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{24}\approx 0{,}059,$$

vagyis egy ilyen gúla térfogata $0{,}059$ köbegységnégyzet. (2 pont)

Tehát a végső test térfogata: $2\sqrt{2}-8\cdot\frac{\sqrt{2}}{24}=\mathbf{\frac{5}{3}\sqrt{2}\approx 2{,}357}$ **köbegység**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4. Zsófi és Kinga élnek-halnak a videójátékokért, minden este hosszú órákat játszanak együtt. Előző alkalommal azonban Zsófi fejhallgatója sajnos tönkrement, így másnap Kingával elindultak a kedvenc műszaki árucikkeket forgalmazó boltjukba, hogy vegyenek egy újat. A videójátékok mellett a lányok másik nagy szenvedélye a statisztika, így a boltban feljegyzést készítettek arról, hogy az egyes fejhallgatók milyen áron kaphatóak. Ezen értékek az alábbi táblázatban láthatók:

Ár (ezer Ft)	10	30	50	60	70	90
Darabszám	2	2	1	2	3	1

a) Segítsen a lányoknak kiszámolni a fejhallgatók árának az átlagtól vett átlagos abszolút eltérését, és adja meg a felső kvartilist! (3 pont)

b) Készítsen az adatokból egy 5 pontos sodrófa diagramot (doboz ábrát) az ehhez szükséges mutatók megadásának segítségével! (3 pont)

Mivel a lányok már úgyis a boltban voltak, gondolták körülnéznek a billentyűzetes soron is. Kingának szerettek volna választani egy új billentyűzetet, amihez 3 szempontot vettek figyelembe. Fontos volt, hogy olcsó, valamint, hogy vezeték nélküli és mechanikus legyen. 2 csak az olcsó, 4 pedig csak a mechanikus kritériumot teljesítette. Olyanból, ami csak vezeték nélküli, illetve vezeték nélküli és mechanikus is, de drága, összesen 4 volt. Olyat, ami vezeték nélküli és emellett még egy vagy két kritériumnak is megfelel, 4-et láttak. 8 olyan volt, ami a kritériumokból csak 2-nek felelt meg. A csak vezeték nélküli, illetve vezeték nélküli és olcsó is, de nem mechanikus kategóriákban összesen 1 volt. Valamint olyat, ami olcsó és ezen kívül egy vagy két kritériumnak tesz eleget, összesen 6-ot találtak.

c) Hány olyan billentyűzetet láttak, amely mindhárom feltételnek megfelelt?

(7 pont)

Megoldás:

a) Először számoljuk ki az átlagot: $\bar{x} = \dfrac{2\cdot 10 + 2\cdot 30 + 50 + 2\cdot 60 + 3\cdot 70 + 90}{11} = 50$, (1 pont)

majd az átlagtól vett átlagos abszolút eltérést.

$$\delta = \frac{2|10-50| + 2|30-50| + |50-50| + 2|60-50| + 3|70-50| + |90-50|}{11} \approx \mathbf{21{,}82}$$

(1 pont)

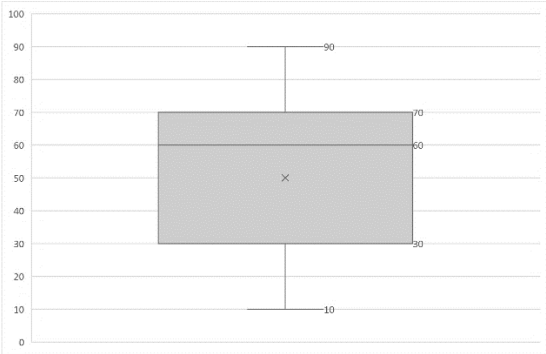
Az elemek növekvő sorrendbe állítva: 10; 10; 30; 30; 50; 60; 60; 70; 70; 70; 90, ebből látszik, hogy a felső kvartilis a **70 ezer Ft**. (1 pont)

b) A szükséges mutatók: minimum, maximum, alsó és felső kvartilis, illetve medián.

(1 pont)

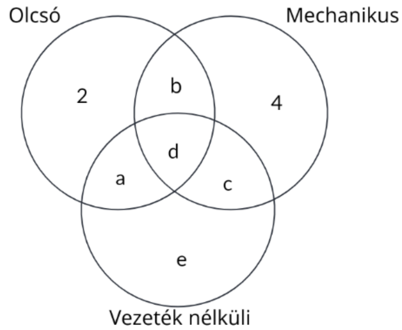
Az előző feladatrészben növekvő sorrendbe állított elemekből ezek rendre: 10, 90, 30, 70, 60. (1 pont)

Ezekből az adatokból elkészített doboz ábra:



(1 pont)

c) A szöveg alapján felrajzolható Venn-diagram:



(1 pont)

A Venn-diagram alapján felírható egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & e+c=4 \\ \text{II.} & a+d+c=4 \\ \text{III.} & a+c+b=8 \\ \text{IV.} & b+d+a=6 \\ \text{V.} & a+e=1 \end{array}\right\}$$

(1 pont)

Az I. egyenletből $c=4-e$ és az V. egyenletből $a=1-e$.

Ezt a két egyenletet összeadva: $a+c=5-2e$. (1 pont)

Ezt behelyettesítve a II. egyenletbe: $5-2e+d=4$, valamint a III. egyenletbe: $5-2e+b=8$, majd ezekből rendre kifejezve d-t és b-t: $d=2e-1$ és $b=2e+3$. (1 pont)

Mindezt behelyettesítve a IV. egyenletbe: $2e-1+2e+3+1-e=6$, így $e=1$. (1 pont)

Visszahelyettesítve, $a=0$, $b=5$, $c=3$ és $d=1$. (1 pont)

Mivel d-vel jelöltük a három halmaz metszetét, ezért **1 olyan billentyűzetet láttak, amely mindhárom feltételnek megfelelt**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Adott az alábbi két függvény:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x + 3}$$

$$\boldsymbol{g(x) = 2x^2 - 4x - 6}$$

a) Számítsa ki a $2g - 4f$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőérték helyét/helyeit!

(6 pont)

b) Számítsa ki az *f* és *g* függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét!

(7 pont)

c) Határozza meg az $\frac{f^2}{g}$ függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben vett határértékeit! (3 pont)

Megoldás:

a) Írjuk fel az így kapott függvényt:

$$2g - 4f = 2\left(2x^2 - 4x - 6\right) - 4\left(3x + 3\right) = 4x^2 - 20x - 24.$$ (1 pont)

Zérushelye ott van a függvénynek, ahol 0-át vesz fel, tehát: $4x^2 - 20x - 24 = 0$. (1 pont)

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva $x_1 = 6$ és $x_2 = -1$ a két gyökünk, vagyis a **6** és a **−1** a függvény két zérushelye. (1 pont)

A függvénynek ott van lokális szélsőértéke, ahol az első derivált 0-át vesz fel:

$$\left(2g - 4f\right)'(x) = 8x - 20 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$ (2 pont)

Az $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$ helyen a függvény deriváltja előjelet vált, tehát ez az egyetlen lokális szélsőérték helyünk, mivel az eredeti függvény másodfokú volt. (1 pont)

b) A két függvény metszéspontjai között kell integrálnunk a közbezárt területet, tehát ott, ahol $f = g$, vagyis $3x + 3 = 2x^2 - 4x - 6$. Ebből a $0 = 2x^2 - 7x - 9$ másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk, hogy ez a két pont a $4,5$ és a -1. (2 pont)

A két függvény közti terület a függvények különbségének határozott integráljával számolható ki, mivel a két metszéspont között az egyenes a parabola fölött helyezkedik el, ezért az alábbi integrálást kell elvégeznünk:

$$\int_{-1}^{4,5} 3x + 3 - \left(2x^2 - 4x - 6\right)\, dx = \int_{-1}^{4,5} -2x^2 + 7x + 9\, dx.$$ (2 pont)

A Newton–Leibniz-formulával számítsuk ki a határozott integrált:

$$\left[-2\frac{x^3}{3}+3,5x^2+9x\right]_{-1}^{4,5}.$$ (1 pont)

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$\left(-2\frac{4,5^3}{3}+3,5\cdot 4,5^2+9\cdot 4,5\right)-\left(-2\frac{(-1)^3}{3}+3,5\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)\right)=$$

$$=\frac{1331}{24}\approx 55,46,$$

tehát a keresett terület **55,46 területegység**. (2 pont)

c) Írjuk fel a $\frac{f^2}{g}$ függvényt:

$$\frac{f^2}{g}=\frac{[3(x+1)]^2}{2x^2-4x-6}=\frac{9(x+1)^2}{2(x-3)(x+1)}=\frac{9x+9}{2x-6}.$$ (1 pont)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x+9}{2x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{9}{x}}{2-\frac{6}{x}}=\frac{9+0}{2+0}=\mathbf{4,5}.$$ (1 pont)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x+9}{2x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9+\frac{9}{x}}{2-\frac{6}{x}}=\frac{9+0}{2+0}=\mathbf{4,5}.$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

6. Áron és Marci, két jó barát, mindketten New Yorkban tanulnak. Délutánonként rendszeresen találkoznak egymással kedvenc helyükön, a Central Parkban. Meg is beszélték, hogy másnap délután 4-kor végeznek órán, így össze tudnak futni fél 5 és 5 között valamikor a szokásos helyükön.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy annak, aki előbb érkezik, nem kell 5 percnél többet várnia a másikra? (5 pont)

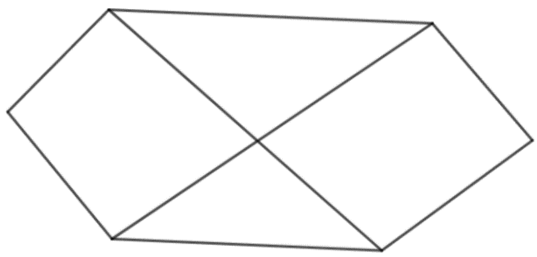
Miközben beszélgetnek, Áron megemlíti, hogy a tegnapi Vállalati pénzügyek teszten nagyon rosszul teljesített. 5 igaz-hamis kérdésre kellett válaszolni, ha valaki mind az 5 kérdésre jól válaszolt, akkor 3 pontot kapott, ha csak 4-re, akkor 2-t, viszont, ha valaki csak 3 vagy kevesebb kérdésre tudta a választ, arra nem járt pont. Áron sajnos csak 0,45 valószínűséggel tudta az egyes kérdésekre a választ!

b) Segítsen Áronnak kiszámolni annak a valószínűségét, hogy 2, valamint, hogy 3 pontot kapott a teszten, illetve adja meg a pontjainak várható értékét! (3 pont)

Áron a parkban lévő faházban szokott édességet vásárolni, ahol 7 fajta nyalókát és valahányféle pillecukrot árulnak. Áron minden héten vagy 4 különböző féle nyalókát vagy 2 eltérő fajta pillecukrot vesz. Kiszámolta, hogyha az összes lehetőséget ki akarja próbálni, ahogyan be tud bevásárolni az édességekből, akkor ehhez pontosan 41 hét szükséges.

c) Hányféle pillecukrot árulnak a faházban? (6 pont)

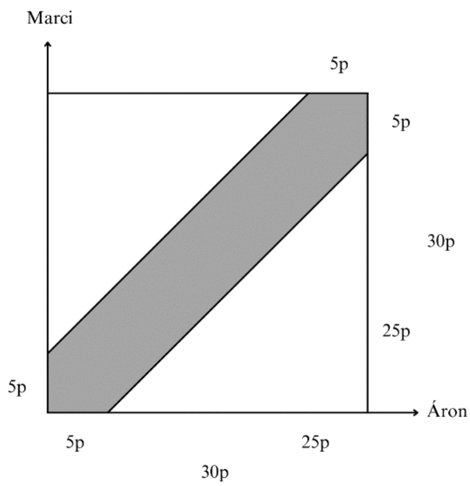
Miután elköszöntek egymástól, és elindultak hazafelé, Marci kicsit eltévedt. Szerencsére megtalálta az alábbi térképet, amelyen a parkban lévő összes út fel van tüntetve. A térképet látván elgondolkodott, hogy végig tudna-e menni a parkban található összes úton úgy, hogy mindegyiken csak egyszer jár. Pár perc tűnődés után arra jutott, hogy igen.



d) Igaza volt Marcinak ebben a kérdésben? Válaszát indokolja! (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Rajzoljunk fel egy „30 perc oldalú” négyzetet, amely azt reprezentálja, hogy a fél 5 és 5 között eltelő fél órában Áron és Marci hogyan érnek oda a találkozóhelyre. Így geometriai valószínűséggel megoldható a feladat. (2 pont)



Az összes esetet megkapjuk, ha kiszámítjuk a négyzet területét, amely: $T_1 = 30 \cdot 30 = 900$.

(1 pont)

A kedvező esetek száma (hogy 5 percnél nem kell többet várnia egyiknek se a másikra) az ábrán jelölt, átlón átmenő sávval szemléltethető, területe (a négyzet területéből kivonjuk a két háromszög területét) $T_2 = 900 - 2 \cdot \frac{25 \cdot 25}{2} = 275$. (1 pont)

Így a valószínűség: $p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{275}{900} \approx \mathbf{0,3056}$. (1 pont)

b) A binomiális eloszlás képletét használva annak a valószínűsége, hogy 2 pontot kapott a teszten (vagyis 4 kérdésre válaszolt helyesen):

$$\binom{5}{4} \cdot 0,45^4 \cdot 0,55 \approx \mathbf{0,11}.$$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 3 pontot kapott a teszten (vagyis minden kérdésre helyesen válaszolt): $0,45^5 \approx \mathbf{0,018}$. (1 pont)

Áron pontjainak várható értéke: $3 \cdot 0,45^5 + 2 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,45^4 \cdot 0,55 \approx \mathbf{0,28}$. (1 pont)

Amennyiben a vizsgázó úgy értelmezte a feladatot, hogy 0,45 valószínűséggel tudja biztosra a választ, amikor pedig nem tudja, akkor tippel (a tippje 0,5 valószínűséggel lesz helyes), a feladat megoldása:

Annak a valószínűsége, hogy eltalál egy kérdést: $0,45 + 0,5 \cdot 0,55 = 0,725$.

Így a binomiális eloszlás képletét használva annak a valószínűsége, hogy 2 pontot kapott a teszten (vagyis 4 kérdésre válaszolt helyesen):

$$\binom{5}{4} \cdot 0,725^4 \cdot 0,275 \approx \mathbf{0,38}.$$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 3 pontot kapott a teszten (vagyis minden kérdésre helyesen válaszolt): $0,725^5 \approx \mathbf{0,20}$. (1 pont)

Áron pontjainak várható értéke: $3 \cdot 0,725^5 + 2 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,725^4 \cdot 0,275 \approx \mathbf{1,36}$. (1 pont)

c) A 7 fajta nyalókából 4-et $\binom{7}{4}$-féleképpen lehet kiválasztani.

A pillecukrok számát jelölve x-szel, ha valahány pillecukorból 2-t szeretnénk kiválasztani, azt $\binom{x}{2}$-féleképpen tehetjük meg, ahol $x \ge 2$. (1 pont)

Ekkor a következő egyenletet tudjuk felírni: $\binom{7}{4} + \binom{x}{2} = 41$. (1 pont)

Rendezve az egyenletet: $35 + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 41$. (1 pont)

A számlálót más alakra hozva tudunk egyszerűsíteni:

$$\frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!}=6$$

$$\frac{x(x-1)}{2}=6$$

$$x^2-x-12=0$$ (2 pont)

Az egyenlet gyökei $x_1=-3$ és $x_2=4$, de mivel $x\geq 2$, ezért az egyetlen megoldás az $\boldsymbol{x=4}$, amit ellenőrizve teljesül az egyenlőség. **Összesen 4 féle pillecukrot árulnak a faházban.** (1 pont)

d) Lényegében Marci arra kíváncsi, hogy van-e az ábrán látható gráfban Euler-út, ami annyit jelent, hogy a gráf minden élén csak egyszer haladhatunk át.

Mivel egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler-utat, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2, ezért **nincs igaza** ebben a kérdésben, mivel 4 páratlan fokszámú csúcsunk van. (2 pont)

Összesen: 16 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

7. Hannáék a számrendszereket tanulták az utóbbi hetekben matek órán. Az egyik óra után a tanár felírt egy házi feladatot a táblára, de Hanna sajnos csengetés után vette észre, és futtában csak a következőt tudta leírni a füzetébe:

$$s_a + g_a = 132_a$$

Otthon észrevette és gondolta, ír a tanárnak egy emailt, hogy megkérdezze, milyen számok állnak az *s* és a *g* helyén. A tanár a következőt válaszolta neki:

„Ha úgy tekintünk először *s*-re és *g*-re, mint tízes számrendszerbeli számokra, akkor a *g* számot úgy kapjuk, hogy az *s* kétjegyű számban a számjegyeket felcseréljük. A számjegyek összege 7. Ha az *s* számot megszorozzuk a második számjegyének felével, és ehhez hozzáadjuk az első számjegyének 4-szeresét, majd az egészet leosztjuk 3-mal, akkor a második számjegyének $\frac{13}{2}$-szeresét kapjuk, úgy, hogy a második számjegyének a fele lesz a maradék."

a) A tanár a levelében csak az *s* és *g* helyére beírt számokhoz adott Hannának útmutatást. Határozza meg ezt a két számot, majd azt, hogy milyen alapú számrendszerben teljesülhet az eredeti egyenlőség! (6 pont)

Hanna tovább olvasta a tanára írását, és látta, hogy két szorgalmi feladatot is csatolt hozzá, amelyek így szólnak:

b) Keresse meg az összes olyan prímszámot, amelyek felírhatók két prímszám összegeként és különbségeként is! (4 pont)

Egy növekvő mértani sorozat első három tagjának szorzata 729. Az első taghoz egyet hozzáadva, valamint a harmadik tagból 13-at kivonva egy számtani sorozat első három elemét kapjuk.

c) Adja meg a mértani és a számtani sorozat első három tagját! (6 pont)

Megoldás:

a) A szöveg alapján felírható egyenletek (ahol *x* és *y* egyjegyű pozitív egész számok, és az *s* szám számjegyeit jelölik) $\dfrac{\frac{y}{2}(10x+y)+4x-\frac{y}{2}}{3}=\dfrac{13}{2}y$ és $x+y=7$. (1 pont)

Az második egyenletből $x=7-y$, amit behelyettesítünk az első egyenletbe: $\frac{y}{2}(70-10y+y)+28-4y-\frac{y}{2}=\frac{39}{2}y$.

Ebből rendezve az egyenletet, megkapjuk, hogy $y_1=4$ és $y_2=-\frac{14}{9}$, de mivel *y* egy számjegy, ezért csak a 4 lesz nekünk megfelelő. (1 pont)

Visszahelyettesítve megkapjuk, hogy $x=3$. **Így az $s=34$ és $g=43$.** (1 pont)

Tehát a következőre keressük a megoldást: $34_a+43_a=132_a$.

$4a^0+3a^1+3a^0+4a^1=2a^0+3a^1+1a^2$, ezt rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $a^2-4a-5=0$, ebből $a_1=5$ és $a_2=-1$. (2 pont)

Viszont -1-es alapú számrendszer nem létezik, így ellenőrzés után kiderül, hogy **5-ös alapú számrendszerben teljesül az egyenlőség**. (1 pont)

b) Tegyük fel, hogy *r* prímszám felírható két prímszám összegeként és különbségeként is.

Ekkor $r > 2$, így *r* biztosan páratlan. Illetve mivel két páratlan szám különbsége és összege nem lehet páratlan, ezért az egyik biztosan egyenlő 2-vel. (1 pont)

Így felírhatjuk, hogy $r = p + 2 = q - 2$, ahol p és q prímek. Viszont így p, $r = p + 2$, és $q = r + 2$ három egymást követő páratlan prímszám, ilyen számhármas viszont csak egy létezik, a 3, 5, és 7. (2 pont)

Így $r = 5 = 3 + 2 = 7 - 2$, tehát **az egyetlen ilyen szám az 5**. (1 pont)

c) Jelölje a számtani sorozat első három tagját: $a - d$; a; $a + d$.

Ekkor a mértani sorozat első három tagja: $a - d - 1$; a; $a + d + 13$. (1 pont)

Továbbá ismert, hogy $(a - d - 1) \cdot a \cdot (a + d + 13) = 729$, valamint a mértani sorozat tulajdonságaiból következik, hogy $(a - d - 1)(a + d + 13) = a^2$. (1 pont)

A két egyenletet elosztva egymással: $a = \frac{729}{a^2}$, ebből, ha felszorzunk, majd harmadik gyököt vonunk, akkor $a = 9$. (1 pont)

Az így kapott *a*-t visszahelyettesítve a második egyenletbe: $(8 - d)(d + 22) = 81$.

Az egyenlet bal oldalát felbontva, majd 0-ra rendezve: $d^2 + 14d - 95 = 0$.

Az egyenlet gyökei $d_1 = 5$ és $d_2 = -19$, de mivel növekvő a mértani sorozat, ezért csak a $d = 5$ lesz jó. (2 pont)

Behelyettesítve, a számtani sorozat első három tagja a **4**, **9** és **14**, valamint a mértani sorozat első három tagja a **3**, **9** és a **27**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

8. Tekintsük a következő állítást az alábbi számhalmazon $\left(x \in \mathbb{R}, \text{ és } \sin x \neq 0\right)$:
„Minden pozitív egész n esetén a $\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{n-1} x\right)$ kifejezés értéke egyenlő lesz $\dfrac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$-szel."

a) Fogalmazza meg az állítás tagadását! **(2 pont)**

b) Bizonyítsa a fenti állítást teljes indukcióval! **(8 pont)**

Adott az $x^2 + x + p = 0$ paraméteres egyenlet.

c) Adja meg a p paraméter értékét, ha tudjuk az egyenlet két gyökéről, hogy: $2x_1 + 3x_2 = 1$ és $x_1 \leq x_2$! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Létezik olyan pozitív egész *n*, hogy a $\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{n-1} x\right)$ kifejezés értéke nem egyenlő $\dfrac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$-szel. (2 pont)

b) Nézzük meg $n=1$-re:

$\cos 2^{1-1} x = \dfrac{\sin 2^1 x}{2^1 \sin x}$, ami $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x} = \dfrac{2\sin x \cdot \cos x}{2\sin x} = \cos x$ tehát $n=1$-re igaz. (1 pont)

Tegyük fel, hogy igaz $n=k$-ra, így az indukciós feltevés:

$$\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{k-1} x\right) = \frac{\sin 2^k x}{2^k \sin x}$$ (1 pont)

Nézzük meg $n=k+1$-re.

$$\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{k-1} x\right)\left(\cos 2^k x\right) = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x}$$ (1 pont)

Az egyenlet jobb oldalát átírhatjuk az alábbi módon: $\dfrac{\sin\left(2^{k+1} x\right)}{2^{k+1} \sin x} = \dfrac{\sin\left(2 \cdot 2^k x\right)}{2 \cdot 2^k \sin x}$.

Ezt követően a $\sin 2y = 2\sin y \cdot \cos y$ azonosságot felhasználva átírhatjuk a kifejezésünket:

$$\frac{\sin\left(2 \cdot 2^k x\right)}{2 \cdot 2^k \sin x} = \frac{2\sin\left(2^k x\right) \cdot \cos\left(2^k x\right)}{2 \cdot 2^k \sin x} = \frac{\sin\left(2^k x\right) \cdot \cos\left(2^k x\right)}{2^k \sin x} = \frac{\sin\left(2^k x\right)}{2^k \sin x} \cdot \cos\left(2^k x\right)$$

(2 pont)

Ezután a kapott kifejezést visszaírjuk az $n=k+1$-es egyenletünkbe.

$$\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{k-1} x\right)\left(\cos 2^k x\right) = \frac{\sin 2^k x}{2^k \sin x} \cdot \cos 2^k x.$$ (1 pont)

Majd egyszerűsítünk mindkét oldalon $\cos 2^k x$-et:

$$\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{k-1} x\right) = \frac{\sin 2^k x}{2^k \sin x}$$ (1 pont)

Az egyszerűsítés után visszakaptuk az eredeti feltevésünket, **tehát beláttuk azt, hogy minden *n*-re teljesül az állítás**. (1 pont)

c) Először adjuk meg a két gyököt paraméteresen: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-4p}}{2}$ és $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2}$

(2 pont)

Ezeket a kifejezéseket helyettesítsük be az egyenletbe: $2\left(\frac{-1-\sqrt{1-4p}}{2}\right)+3\left(\frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2}\right)=1$. (1 pont)

Az egyenlet egyszerűsítve: $-5+\sqrt{1-4p}=2$ (2 pont)

Ezt rendezve: $\sqrt{1-4p}=7$

Mindkét oldalt négyzetre emelve megkapjuk, hogy ***p* = -12**. (1 pont)

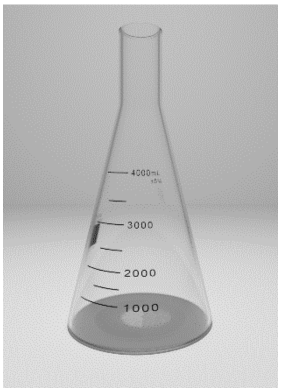
Összesen: 16 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

9.

a) **Adott a síkon az $A(1;2)$ pont, ami az *O* középpontú, 5 egység sugarú kör körvonalán található. Tudjuk, hogy az *O* középponton áthalad az $y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3}$ egyenesünk. Határozza meg a *B* és *C* pontokon átmenő egyenes egyenletét, ha tudjuk, hogy az *A*, *B* és *C* pontok egy szabályos háromszöget alkotnak, és ezek a pontok a kör körvonalán helyezkednek el.** **(9 pont)**

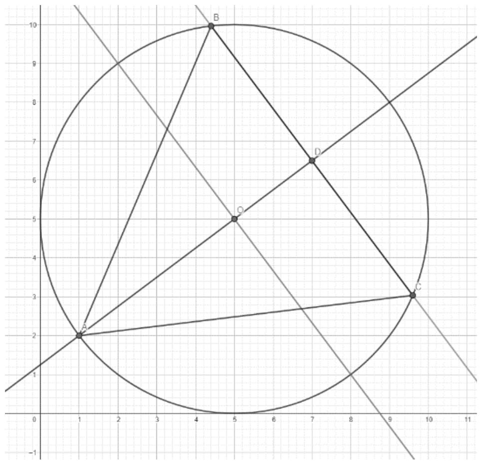
b) **Szabi és Robi a kémia nagy szerelmesei, a minap is a szertárban tartottak leltárt az ott fellelhető készletről. Az egyik szekrényben találtak egy Erlenmeyer-lombikot, amelyben hidrogén-peroxid állt. Fel akarták jegyezni, hogy milyen mennyiségben tartalmazza a vegyületet, viszont sajnos minden felirat le volt kopva a lombik oldaláról. Annyit viszont tudtak, hogy a lombik kinézete megfelel annak, ha az** $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } 0 \le x < 4 \\ \frac{1}{2}x - 1, \text{ ha } 4 \le x \le 8 \end{cases}$ **függvényt megforgatjuk az *x* tengely körül, egy olyan koordináta-rendszerben, ahol egy egység a valóságban 2 cm-nek felel meg.**



Hány deciliter hidrogén-peroxidot tartalmaz a lombik, ha tudjuk, hogy a magasságának 87,5%-áig van töltve? **(7 pont)**

<u>Megoldás</u>:

a) Az *O* középpontú kör egyenletének meghatározásához egy $A(1;2)$ középpontú 5 egység sugarú kör és az $y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3}$ egyenesünk érintési pontját kell megkeresnünk.



Ehhez az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 25 \\ y &= -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3} \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenletbe behelyettesítve a másodikat azt kapjuk, hogy $x = 5$, az ehhez tartozó $y = 5$. (2 pont)

Így az *O* középpontú körünk egyenlete: $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. (2 pont)

Mivel az *ABC* háromszög szabályos, ezért az *AD* szakasz a háromszög súlyvonala, amit a súlypont 1:2 arányban oszt (ami jelen esetben az *O* kör középpontja). Ezért, ha az *AO* szakasz 5 egység, akkor az *OD* szakasz 2,5 egység hosszúságú lesz, így az $\overrightarrow{AO}(4;3)$ vektort, ha megfelezzük és eltoljuk *O* pontba, akkor megkapjuk a $D(7;6,5)$ pontot.

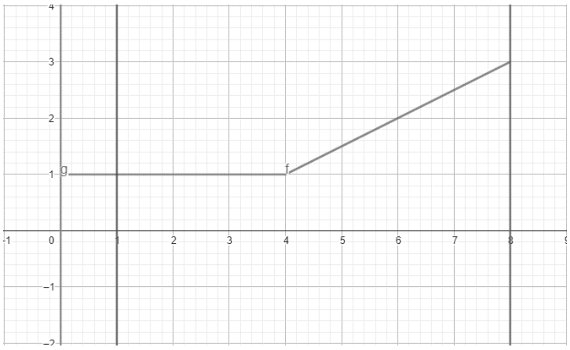
(2 pont)

Az $\overrightarrow{AO}(4;3)$ vektort, mint normálvektort és a $D(7;6,5)$ pontot felhasználva kiszámolhatjuk annak az egyenesnek az egyenletét, amin rajta van a *B* és *C* pont.

(1 pont)

Az így kapott oldalegyenes egyenlete: $\boldsymbol{y = -\frac{4}{3}x + \frac{95}{6}}$**.** (1 pont)

b) Ábrázoljuk a függvényt koordináta-rendszerben: (1 pont)



A magasságának 87,5%-a: $8 \cdot 0{,}875 = 7$

(1 pont)

Mivel minden egység a valóságban két 2 cm, ezért számolhatunk azonnal ezzel.

(1 pont)

A test térfogata kiszámítható úgy, hogy külön kiszámoljuk a henger és a csonkakúp térfogatát. (1 pont)

$$V = r^2 m\pi + \frac{\left(R^2 + Rr + r^2\right)m\pi}{3} = 2^2 \cdot 6\pi + \frac{\left(2^2 + 2\cdot 6 + 6^2\right)8\pi}{3} = \frac{488}{3}\pi \approx 511{,}03\ \text{cm}^3.$$

(2 pont)

Ezt átváltva deciliterbe: **5,11 dl hidrogén-peroxid volt a lombikban.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

A szerezhető maximális pontszám: 115 pont