PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. február 15.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2025. február 15.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

I.

1. Adottak a következő számok: 360 és 1350. Határozza meg ezek legkisebb közös többszörösét! (2 pont)

Megoldás:

Felírjuk a prímtényezős felbontásokat:

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. (1 pont)

A két szám legkisebb közös többszöröse a közös prímtényezők szorzata az előforduló legnagyobb hatványon, vagyis: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = \mathbf{5400}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

2. Válassza ki az alábbiak közül az összes olyan állítást, amely tagadása a következőnek!

„Minden farmon van kecske."

A: Semelyik farmon nincs kecske.

B: Van olyan farm, ahol van kecske.

C: Van olyan farm, ahol nincs kecske.

D: Nem minden farmon van kecske. (2 pont)

Megoldás:

Az állítás tagadásai: **C** és **D**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

3. Egy gráfban 5 csúcs van, az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak? (2 pont)

Megoldás:

Az élek száma megegyezik a fokszámok összegének felével:

$\frac{3+2+2+2+1}{2} = \mathbf{5}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

4. Dorina és Lea fagyizni mennek. A gyümölcsös fagyik vízalapúak, ezek között árulnak erdei gyümölcsöset, citromosat, epreset, málnásat és mangósat. A tejalapú fagyik közül kapható nutellás, csokis kekszes, étcsokis és pisztáciás. Hányféleképpen tud Dorina fagylaltot választani, ha 2 gombóc gyümölcsöset és 1 gombóc tejalapút szeretne, valamint mindhárom gombócnak különböző ízesítésűnek kell lennie? A fagyit kehelybe kéri, tehát a gombócok sorrendje nem számít. (2 pont)

Megoldás:

Az 5 gyümölcsös ízből 2-t $\binom{5}{2}=10$, míg a 4 tejalapú fagyiból 1-et $\binom{4}{1}=4$-féleképpen választhat. Így $10\cdot 4=$ **40 -féleképpen** választhat magának fagylaltot Dorina. (2 pont)

Összesen: 2 pont

5. Adott az $y=(x+7)^2-4$ függvény. Döntse el, hogy a $P(-4;5)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja! (2 pont)

Megoldás:

A pont koordinátáit behelyettesítjük a függvénybe:

$(-4+7)^2-4=5$, amit egyszerűsítve látható, hogy az egyenlőség igaz. (1 pont)

Tehát *P* pont rajta van a grafikonon. (1 pont)

Összesen: 2 pont

6. Írja fel a 455 10-es számrendszerbeli számot 6-os számrendszerben! (2 pont)

Megoldás:

$455:6=75$, maradék az 5,

$75:6=12$, maradék a 3,

$12:6=2$, maradék a 0

$2:6=0$, maradék a 2.

A maradékokat visszafelé olvasva megkapjuk, hogy $\mathbf{455_{10}=2035_6}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

7. Egy számtani sorozat második tagja 7, ötödik tagja 13. Mennyi a sorozat első 9 tagjának összege? (3 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat definíciója alapján $a_5=a_2+3d$.

A feladat szövegében megadott adatokat behelyettesítve és egyszerűsítve:

$13=7+3d$;

$6=3d$;

$d=2$. (1 pont)

A számtani sorozat definíciója alapján $a_2=a_1+d$.

Ebbe behelyettesítve és egyszerűsítve:

$7=a_1+2$;

$a_1=5$. (1 pont)

A számtani sorozat első *n* tagjának összegére vonatkozó képletet felhasználva és behelyettesítve:

$S_9 = \frac{2\cdot5+(9-1)\cdot2}{2}\cdot9 = \mathbf{117}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

8. Hány darab négyjegyű páros szám alkotható a 0, 1, 2, 3 számjegyekből? Egy számjegy csak egyszer használható fel. (3 pont)

Megoldás:

Az első esetben az utolsó számjegy 0, ekkor az első három számjegy sorrendje $3! = 6$-féle lehet. (1 pont)

A második esetben az utolsó számjegy 2, ekkor az első három számjegy sorrendje $2\cdot2\cdot1 = 4$-féle lehet. (1 pont)

$6+4=\mathbf{10}$ **darab** négyjegyű páros szám alkotható ezekből a számjegyekből. (1 pont)

Összesen: 3 pont

9. Az *ABCD* trapézban *AB* és *CD* oldalak párhuzamosak. Tudjuk, hogy $CD = 7$ cm és $AD = 9$ cm. Az *A* csúcsnál fekvő belső szög nagysága $80°$. Számítsa ki a négyszög *AC* átlójának hosszát! (2 pont)

Megoldás:

Tudjuk, hogy a trapéz egy száron fekvő szögeinek összege $180°$, tehát a *D* csúcsnál fekvő szög $100°$. (1 pont)

A koszinusztételt felhasználva és egyszerűsítve:

$AC^2 = 9^2+7^2-2\cdot9\cdot7\cdot\cos100°$; (1 pont)

$AC = \sqrt{9^2+7^2-2\cdot9\cdot7\cdot\cos100°} = \mathbf{12{,}3\ cm}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

10. Állapítsa meg az alábbi függvény értékkészletét!

$$f(x) = -x^2+10x-21$$ **(3 pont)**

Megoldás:

Teljes négyzetté alakítva $f(x) = -(x-5)^2+4$. (1 pont)

Ebből megállapítható, hogy a függvény értékkészlete: $\boldsymbol{x \in \left]-\infty;4\right]}$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

11. Legyen *A* a 15-nél kisebb pozitív egész számok halmaza és *B* pedig a 26-nál kisebb négyzetszámok halmaza. Elemei felsorolásával adja meg az $A\cap B$ halmazt! (3 pont)

Megoldás:

$A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13,\ 14\}$ (1 pont)

$B=\{1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25\}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A\cap B=\{1;\ 4;\ 9\}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

12. Egy dobókockát kétszer egymás után feldobunk. Jelölje *A* azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 10-nél kisebb. Mennyi a valószínűsége az *A* esemény bekövetkezésének? Válaszát 2 tizedesjegyre kerekítse! (3 pont)

Megoldás:

Az *A* esemény valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy először kiszámoljuk a komplementerének a valószínűségét, majd ezt kivonjuk 1-ből.

10-et a következő módokon dobhatunk: $(5;\ 5)$, $(4;\ 6)$, $(6;\ 4)$;

11-et a következő módokon dobhatunk: $(5;\ 6)$, $(6;\ 5)$;

12-őt a következő módokon dobhatunk: $(6;\ 6)$.

Tehát a kedvezőtlen esetek száma 6. (1 pont)

Az összes eset száma pedig $6^2=36$. (1 pont)

Az *A* esemény valószínűsége tehát: $1-\frac{6}{36}=\boldsymbol{\frac{30}{36}\approx 0,83}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

Az I. rész során szerezhető maximális pontszám: 30 pont

II/A.

13. Oldja meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\mathbf{3^{x+3}+9^{x+1}=972}$ **(8 pont)**

b) $\mathbf{(x+2)^2-6\le x+8}$ **(4 pont)**

Megoldás:

a) Első lépésként a 9-et felírjuk a 3 hatványaként:

$3^{x+3}+3^{2(x+1)}=972$. (1 pont)

A hatványkitevőben felbontjuk a zárójelet:

$3^{x+3}+3^{2x+2}=972$.

Az $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$ azonosságot felhasználva:

$3^x\cdot 3^3+3^{2x}\cdot 3^2=972$. (1 pont)

Vezessünk be új ismeretlent, 3^x legyen egyenlő y-nal, illetve rendezzük 0-ra az egyenletet:

$9y^2+27y-972=0$. (1 pont)

Ebből: $y_1=9$, és (1 pont)

$y_2=-12$, de mivel $3^x>0$ minden x-re, így ez nem megoldás. (1 pont)

Visszahelyettesítünk:

$3^x=9$;

$3^x=3^2$. (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt az alapok elhagyhatóak, így:

$\mathbf{x=2}$. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) Első lépésként felbontjuk a zárójelet és átrendezzük az egyenletet:

$x^2+4x+4-6\le x+8$;

$x^2+3x-10\le 0$. (1 pont)

Az $x^2+3x-10=0$ egyenlet gyökei: $x_1=-5$, és $x_2=2$. (1 pont)

Mivel a főegyüttható pozitív, ezért konvex a parabola, tehát $\mathbf{x\in[-5;2]}$. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Összesen: 12 pont

14. Gréti diákjai közül 20-an írták meg az Országos Nyílt Próbaérettségit. Az első részben az elérhető legmagasabb pontszám 30 volt. A következő gyakorisági táblázat Gréti diákjainak a próbaérettségi első részében elért eredményeit mutatja:

Elért pontszám	**30**	**29**	**26**	**21**	**18**	**13**
Próbaérettségik száma	**3**	**6**	**4**	**2**	**3**	**2**

a) Határozza meg az összes dolgozat pontszámának számtani közepét, szórását, móduszát és terjedelmét! (5 pont)

b) Ábrázolja az eredményeket sodrófa diagramon (doboz ábrán)! (5 pont)

Gréti úgy döntött, hogy a három, hibátlan első részt író diákjának ajándékot ad. Hatféle ajándékot ajánlott fel nekik: egy búgócsigát, egy Peonzát, egy fidget spinnert, egy Rubik-kockát, egy sakk-készletet és egy jojót.

c) Hányféleképpen választhatnak ajándékot a diákok, ha minden ajándékból csak 1 darab van és mindenki csak egy ajándékot kaphat? (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) **Számtani közép:**

$$\frac{3\cdot 30+6\cdot 29+4\cdot 26+2\cdot 21+3\cdot 18+2\cdot 13}{20}=\frac{490}{20}=\mathbf{24{,}5}$$ (1 pont)

Szórás:

$$\sqrt{\frac{3\cdot\left(30-24{,}5\right)^2+\ldots+2\cdot\left(13-24{,}5\right)^2}{20}}\approx\mathbf{5{,}64}$$ (2 pont)

Módusz: 29 (1 pont)

Terjedelem: $30-13=\mathbf{17}$ (1 pont)

b) Először kiszámoljuk a kvartiliseket:

A **medián** a 10. és a 11. elem számtani átlaga, tehát: $\frac{26+26}{2}=\mathbf{26}$.

Az **alsó kvartilis** az 5. és a 6. elem számtani átlaga, tehát: $\frac{18+21}{2}=\mathbf{19{,}5}$.

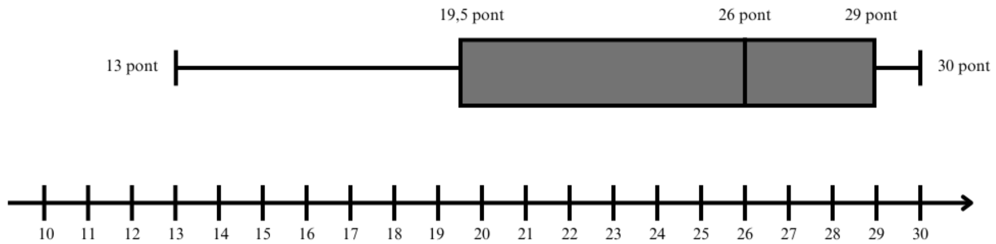
A **felső kvartilis** a 15. és a 16. elem számtani átlaga, tehát: $\frac{29+29}{2}=\mathbf{29}$. (2 pont)

Majd meghatározzuk a sokaság szélsőértékeit:

A sokaság **minimuma 13**.

A sokaság **maximuma 30**. (1 pont)

Helyes ábrázolás:



(2 pont)

c) Az először választó diák hatféle ajándékból választhat, a másodikként választó már csak ötféléből, és a harmadikként választó diák négyféléből, tehát:

$6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$ -féle lehetőség van. (2 pont)

Összesen: 12 pont

15. Egy középiskolai gólyatábor első estéjén pizzát rendelhetnek a diákok. Zsófi nagyon segítőkészen összeszedi a rendeléseket. Minden tanuló sonka, gomba vagy kukorica feltétet kérhet a pizzájára. Egy diák akár több feltétet is kérhet, de egyet mindenképpen kell választania. 10-en voltak, akik sonkát és gombát is, 11-en, akik gombát és kukoricát is és 8-an, akik sonkát és kukoricát is kértek a pizzájukra. 3 olyan nebuló volt, aki mindhárom feltétből kért. A táborban 107 diák vett részt. Azok közül, akik csak egy feltétet kértek, kétszer annyian kértek kukoricát, mint gombát, de csak negyedannyian kértek sonkát, mint kukoricát.

a) Számítsa ki, hogy hányan kértek csak gombát a pizzájukra, ha az összes diák rendelt pizzát! (4 pont)

A diákok előszeretettel számháborúznak, azonban a meteorológus a televízióban azt mondta, hogy a tábor hetén minden nap 80% az esély arra, hogy esni fog az eső. Mivel sokan fehér cipőt hordanak, nem szeretnének esőben játszani.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 7 napból legfeljebb 5 nap fog esni az eső? (4 pont)

c) Amennyiben esni fog az eső, a soron következő programok egy négyzet alapú egyenes gúla formájú sátorban kerülnek megrendezésre. A gúla alapélének hossza 14 m, a gúla magassága pedig 6 m. Mekkora a sátor palástjának a területe? (4 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Mivel tudjuk, hogy 3-an kértek mindhárom feltétből, ezért meg tudjuk állapítani, hogy azok közül, akik pontosan 2 feltétet kértek a pizzájukra, 7-en kértek sonkát és gombát, 8-an kértek gombát és kukoricát, és 5-en kértek sonkát és kukoricát. (1 pont)

Akik pontosan 1 feltétet kértek, $107 - 3 - 7 - 8 - 5 = 84$ -en vannak. (1 pont)

Jelölje x azokat, akik csak gombát kértek, $2x$ azokat, akik csak kukoricát, és $\frac{1}{2}x$ azokat, akik csak sonkát. Ezek alapján felírható a következő egyenlet azokra, akik pontosan 1 feltétet kértek:

$x + 2x + \frac{1}{2}x = 84$; (1 pont)

amit megoldva $x = 24$, tehát **24-en kértek csak gombát a pizzájukra**. (1 pont)

b) Ahhoz, hogy megtudjuk, mekkora a valószínűsége, hogy legfeljebb öt nap fog esni az eső, kiszámoljuk, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy hat nap esik, illetve, hogy mind a hét napon esik.

A binomiális eloszlás képletét használva,

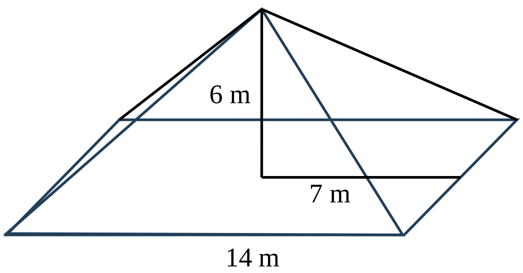
$\binom{7}{6}\cdot 0{,}8^6\cdot 0{,}2^1\approx 0{,}3670$ az esélye, hogy hat nap esik, (1 pont)

$\binom{7}{7}\cdot 0{,}8^7\cdot 0{,}2^0\approx 0{,}2097$ az esélye, hogy mind a hét nap esik, (1 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy legfeljebb öt nap esik:

$1-(0{,}3670+0{,}2097)\approx \mathbf{0{,}4233}$. (2 pont)

c) A palást kiszámolásához először a gúla oldallap magasságának kiszámítása szükséges. A Pitagorasz-tételt felhasználva:



$m=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}\approx 9{,}22$ m. (1 pont)

A gúla egy oldallapjának területe: $T=\dfrac{14\cdot\sqrt{85}}{2}=7\sqrt{85}\approx 64{,}54\ \text{m}^2$. (1 pont)

A palást felszíne 4 oldallapból épül fel, így: (1 pont)

$A=4\cdot 7\sqrt{85}=28\sqrt{85}\approx \mathbf{258{,}15\ m^2}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

A II/A. rész során szerezhető maximális pontszám: 36 pont

II/B.

16. Ádi, Áron, Bori, Hanna, Kinga, Marci, Szabi és Tami kertmoziba mennek, mert kedvenc filmjüket, a *Shreket* vetítik. A nézőtér szimmetrikus trapéz alaprajzú, a sorokban található székek száma a vászontól távolodva növekszik. Az első sorban 17 szék van, és minden utána következő sorban 4-gyel több, mint az eggyel előtte lévőben. A kertmoziban összesen 468 ülőhely van.

a) Hány sor található a nézőtéren? (7 pont)

b) Amikor találkoznak, a lányok öleléssel köszöntik a fiúkat és a lányokat is, viszont a fiúk egymást kézfogással üdvözlik. Hány ölelés valósul meg a 8 ember között? (3 pont)

c) A jegyek 8 egymás melletti helyre szólnak. Hányféleképpen ülhetnek le erre a 8 helyre, ha biztosan csak ellenkező neműek ülnek egymás mellé, illetve Hanna biztosan a szélén ül? (4 pont)

d) Egy jegy eredeti ára 5000 Ft volt, azonban a 8 fős társaság az érvényes diákigazolványuknak köszönhetően kedvezményesen vette meg a jegyeket, így összesen 33 200 Ft-ot fizettek. Hány százalékos volt a diákkedvezmény? (3 pont)

Megoldás:

a) Az egymást követő sorokban található székek számai egy számtani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 17$ és $d = 4$. (1 pont)

A sorok számát jelölje *n*, ekkor $S_n = 468$. (1 pont)

A számtani sorozat összegképlete alapján felírható a következő egyenlőség:

$468 = \frac{2 \cdot 17 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n$; (1 pont)

$936 = (34 + 4n - 4) \cdot n$;

$936 = 34n + 4n^2 - 4n$; (1 pont)

$4n^2 + 30n - 936 = 0$. (1 pont)

Ebből $\boldsymbol{n_1 = 12}$, és (1 pont)

$n_2 = -\frac{39}{2}$, de mivel a sorok számának pozitív egész számnak kell lennie, ezért ez nem megoldás. (1 pont)

b) A 4 lány között $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ ölelés valósul meg. (1 pont)

A 4 lány és a 4 fiú között $4 \cdot 4 = 16$ ölelés valósul meg. (1 pont)

Tehát összesen **22** ölelés valósul meg a 8 ember között. (1 pont)

c) Ha Hanna bal szélen ül (ezt vesszük 1. széknek), akkor az innentől számított 3., 5. és 7. széken ülhetnek a lányok, mégpedig $3! = 6$-féleképpen. (1 pont)

A fiúk a 2., 4., 6. és 8. székeken tudnak helyet foglalni: $4! = 24$-féleképpen. (1 pont)

Tehát, ha Hanna a bal szélen ül, akkor $6 \cdot 24 = 144$-féleképpen ülhetnek le. (1 pont)

Mivel Hanna a jobb szélen is ülhet, ezért a lehetőségek számát megszorozzuk 2-vel, és megkapjuk, hogy **288-féleképpen** ülhetnek le. (1 pont)

d) Ha a 8 fős társaság minden tagja eredeti áron vett volna jegyet, akkor $8 \cdot 5000 = 40000$ Ft-ot fizettek volna. (1 pont)

$\frac{33200}{40000} = 0,83$, tehát 83%-os áron vették meg a jegyeket. (1 pont)

A feladat a kedvezmény nagyságát kérdezi, tehát ezt ki kell vonnunk 100%-ból: $100\% - 83\% = \mathbf{17\%}$ a kedvezmény. (1 pont)

Összesen: 17 pont

17. Odett szüreti bálon vett részt barátaival Galgamácsán, ahol a mulatság részeként körbetáncolták a falut. A falu főtere háromszög alakú; az egyik oldalán nyugvó két szög $40°$ és $80°$. Ha a háromszög beírt körének középpontját tükrözzük a háromszög oldalaira, akkor ezen pontok és a háromszög csúcsai együttesen egy konvex hatszöget alkotnak.

a) Mekkorák a hatszög szögei? (8 pont)

A falu körbetáncolása után a szőlőtaposás volt a következő program. Az elkészült mustból 40%-os és 75%-os gyümölcstartalmú szőlőlevet készítettek.

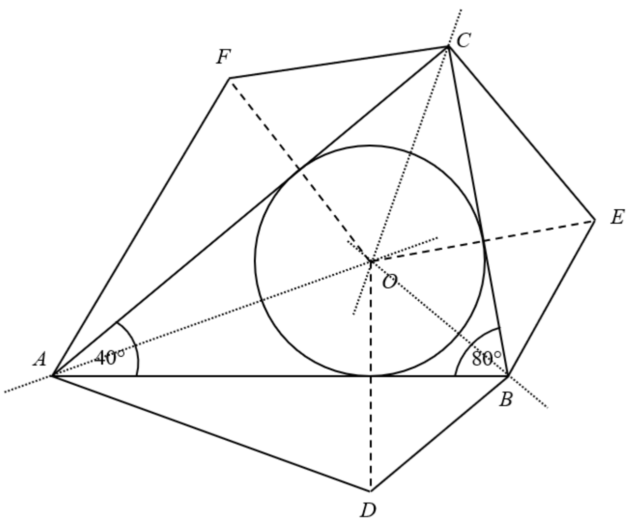
b) Hány litert kell ezekből összeönteni, hogy 84 liter 55%-os gyümölcstartalmú szőlőlé keletkezzen? (6 pont)

Az egyik háznál az elvehető sütemények között 6 darab linzer, 5 zserbó, 3 non plus ultra és 7 darab hókifli van. Odett megkérte Annát, hogy hozzon neki 3 süteményt.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna 1 linzert, 1 zserbót és 1 hókiflit választ? (3 pont)

Megoldás:

a) Ábrázoljuk az adatokat:



(2 pont)

A háromszög harmadik szöge: $180° - 40° - 80° = 60°$. (1 pont)

A beírt kör középpontja a szögfelező egyenesek metszéspontja. (1 pont)

Az *ABO* háromszöget tükrözzük az *AB* oldalra.

Az így keletkezett *BAD* háromszögben az *A* csúcsnál lévő szög megegyezik az *OAB* háromszög *A* csúcsnál fekvő szögével, ami $20°$-os. (1 pont)

Ezt a tükrözést megismételjük a *COB* háromszögben a *BC* oldalra és az *AOC* háromszögben az *AC* oldalra.

A tükrözések után észrevehető, hogy az eredeti háromszög csúcsainál a belső szögek kétszerese lesz jelen a hatszögben, vagyis a keletkezett hatszög három szöge: $\boldsymbol{FAD\measuredangle} = 2 \cdot 40° = \mathbf{80°}$, $\boldsymbol{DBE\measuredangle} = 2 \cdot 80° = \mathbf{160°}$, $\boldsymbol{ECF\measuredangle} = 2 \cdot 60° = \mathbf{120°}$. (1 pont)

Az $ADB\measuredangle$, $BEC\measuredangle$ és az $CFA\measuredangle$ szögek rendre megegyezik az $AOB\measuredangle$, $BOC\measuredangle$ és az $COA\measuredangle$ szögekkel, melyek a megfelelő oldalakon található szögek fele kivonva $180°$-ból. (1 pont)

Vagyis a hatszög maradék három szöge: $\boldsymbol{ADB\measuredangle} = 180° - 20° - 40° = \mathbf{120°}$, $\boldsymbol{BEC\measuredangle} = 180° - 40° - 30° = \mathbf{110°}$, $\boldsymbol{CFA\measuredangle} = 180° - 30° - 20° = \mathbf{130°}$. (1 pont)

b) Táblázatba gyűjtjük az adatokat; a 40%-os gyümölcstartalmú szőlőlé mennyisége legyen *x*, a 75%-os gyümölcstartalmú mennyisége pedig $84 - x$. (2 pont)

	Gyümölcstartalom (%)	Mennyiség (l)	Gyümölcstartalom (l)
I.	40	x	$0,4x$
II.	75	$84 - x$	$0,75(84 - x)$
Keverék	55	84	$0,55 \cdot 84$

Felírható a $0,4x + 0,75(84 - x) = 0,55 \cdot 84$ egyenlet, amelyet egyszerűsítve: (1 pont)

$0,4x + 63 - 0,75x = 46,2$;

$0,35x = 16,8$. (1 pont)

Ebből $x = 48$, tehát **48 liter** 40%-os gyümölcstartalmú szőlőlevet kell felhasználnunk. (1 pont)

$84 - 48 = 36$,tehát a 75%-os gyümölcstartalmú szőlőléből 36 litert kell felhasználnunk. (1 pont)

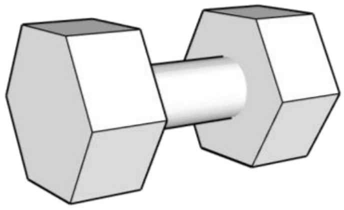
c) Egy linzert $\binom{6}{1}$, egy zserbót $\binom{5}{1}$, egy hókiflit pedig $\binom{7}{1}$-féleképpen választhat ki. (1 pont)

Három süteményt $\binom{21}{3}$-féleképpen választhat ki. (1 pont)

Tehát $\dfrac{\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{21}{3}} = \dfrac{3}{19} \approx \mathbf{0,158}$ a keresett valószínűség. (1 pont)

Összesen: 17 pont

18. Árpi elkezdett edzőterembe járni mostanában, ahol épp bicepszre gyúr. A súlyzó, amit használ 3 testből épül fel, 2 db szabályos hatszög alapú egyenes hasábból és egy hengerből. A szabályos hatszög alapú egyenes hasábról tudjuk, hogy a hatszög egy oldala 5 cm, a magasság pedig 7 cm. A henger alapjának sugara 3 cm és a magassága 20 cm.



a) Határozza meg a súlyzó térfogatát két tizedesjegyre kerekítve! (5 pont)

Az edzőterem egy vállalkozáslánc része, amely tovább akar terjeszkedni. A meglévő két helyszín a következő koordinátákon helyezkedik el: $A(1;6)$ és $B(8;7)$. Ezek egyenlő távolságra vannak a tulajdonos, Robi házától, ami az $R(5;3)$ koordinátákon található. Robi szeretné, hogy a harmadik helyszín is ugyanakkora távolságra legyen otthonától, mint az előző kettő.

b) Hol helyezkedhet el az új edzőterem, ha Robi ragaszkodik hozzá, hogy az x tengelyen legyen? (6 pont)

Miután Robi kiválasztotta a konditerem új helyszínét, el is kezdte berendezni azt. Árpi imád pakolni, ezért Robi segítségére siet a súlyok rakodásában. Árpi egyedül 120 perc alatt pakolná be a konditermet, Robi pedig 150 perc alatt. Az első 30 percben Árpi egyedül pakol, utána segítséget kér Robitól. A hátralévő időben együtt küzdenek meg a súlyokkal.

c) Mennyi idő alatt sikerül minden súlyt bepakolniuk az új terembe? (6 pont)

Megoldás:

a) A súlyzó alapja egy 5 cm oldalhosszúságú szabályos hatszög, mely 6 darab szabályos háromszögből épül fel. A háromszög területét megkaphatjuk, ha kiszámoljuk a háromszög magasságát, és alkalmazzuk a $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ képletet. A magasság a Pitagorasz-tétel alapján felírható a következő módon:

$m_a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33$ cm. (1 pont)

Innen ki tudjuk számolni a hatszög területét: $T_{\text{hatszög}} : 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$. (1 pont)

A hasáb térfogata: $V_{\text{hasáb}} = T_{\text{alapterület}} \cdot m = 64{,}95 \cdot 7 = 454{,}66 \text{ cm}^3$. (1 pont)

A henger térfogata: $V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot M = 3^2 \cdot \pi \cdot 20 = 565{,}49 \text{ cm}^3$. (1 pont)

A súlyzó teljes térfogata: $V_{\text{súlyzó}} = 2 \cdot V_{\text{hasáb}} + V_{\text{henger}} = 2 \cdot 454{,}66 + 565{,}49 = \mathbf{1474{,}81\ cm^3}$.

(1 pont)

b) Ahhoz, hogy Robitól egyenlő távolságra helyezkedjenek el a helyszínek, egy olyan körön kell rajta lenniük, melynek középpontja $R(5;3)$, sugara pedig kiszámolható a középpont és egy, már megadott pont koordinátáiból:

$r = |\overrightarrow{AR}| = \sqrt{(5-1)^2 + (3-6)^2} = 5.$ (1 pont)

Innen fel tudjuk írni az *R* középpontú, *r* sugarú kör egyenletét:
$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ (1 pont)
Mivel tudjuk, hogy az új helyszín az *x* tengelyen található, így $y = 0$.
Ezt behelyettesítve az egyenletbe: $(x-5)^2 + (0-3)^2 = 25$. (1 pont)
Ezt tovább egyszerűsítve megkapjuk a következő egyenletet: $x^2 - 10x + 9 = 0$. (1 pont)
Ebből megkapjuk, hogy az új helyszín lehetséges abszcisszája $x_1 = 1$ és $x_2 = 9$. (1 pont)
Tehát az új helyszín lehetséges koordinátái: $\boldsymbol{P_1(1;0)}$ és $\boldsymbol{P_2(9;0)}$. (1 pont)

c) Az alábbi táblázat azt jelöli, hogy Árpi és Robi egységnyi idő alatt a munka hányad részét végeznék el. (A teljes elvégzendő munka 1 egységet tesz ki):

	Teljes munka befejezése	1 perc alatt	*x* perc alatt
Árpi	120 perc	$\frac{1}{120}$	$\frac{x}{120}$
Robi	150 perc	$\frac{1}{150}$	$\frac{x}{150}$

(2 pont)

Az Árpi által 30 perc alatt (egyedül) elvégzett munka az egész $\frac{30}{120}$-a. (1 pont)

Ebből felírható a következő egyenlet: $\frac{x}{120} + \frac{x}{150} + \frac{30}{120} = 1$. (1 pont)

Ebből az egyenletből megkapjuk, hogy $x = 50$, tehát együtt 50 percet pakolnak. (1 pont)
Így $50 + 30 = \mathbf{80\ perc}$ alatt végeznek a teljes bepakolással. (1 pont)

Összesen: 17 pont

A II/B. rész során szerezhető maximális pontszám: 34 pont