PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2025. február 15.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2025. február 15.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{26}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} + \frac{4}{9} = 0$ **(7 pont)**

b) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+4}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Bevezetünk egy új ismeretlent: $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. (1 pont)

Ekkor a hatványozás azonosságait felhasználva átírható az egyenlet a következő alakra:

$y^2 - \frac{26}{27}\cdot\frac{3}{2}y + \frac{4}{9} = 0$. (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát felszorozva 9-cel egy egyszerűbb alakot kapunk:

$9y^2 - 13y + 4 = 0$.

Ennek az egyenletnek a két gyöke: $y_1 = 1$, és $y_2 = \frac{4}{9}$. (1 pont)

Ezeket visszahelyettesítve: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$, és $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$. (1 pont)

Innen az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\boldsymbol{x_1 = 0}$ és $\boldsymbol{x_2 = -2}$. (2 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) Kikötés: $x \geq 5$, $x \geq -3$ és $x \geq -2$, összevonva: $x \geq 5$. (1 pont)

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$x - 5 + 2\sqrt{(x-5)(x+3)} + x + 3 = 2x + 4$, (1 pont)

Rendezve az egyenletet:

$2\sqrt{(x-5)(x+3)} = 6$.

Leosztva mindkét oldalt 2-vel, majd négyzetre emelve:

$(x-5)(x+3) = 9$. (1 pont)

Felbontva a zárójelet és 0-ra rendezve:

$x^2 - 2x - 24 = 0$.

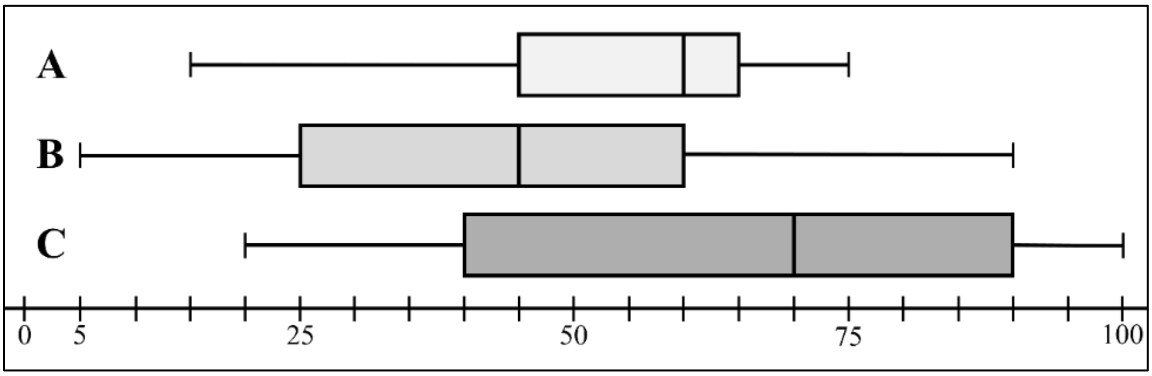
Az egyenlet két gyöke $x_1 = -4$ és $x_2 = 6$. (1 pont)

Innen a -4 nem megoldás a kikötés miatt, így az egyetlen megoldás az $\boldsymbol{x = 6}$. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Összesen: 13 pont

2. Kinga egyik délután rettentően unatkozott, és útnak indult felmérést készíteni az otthona környezetében található három társasház (A, B, C) lakosainak életkor szerinti megoszlásáról. Minden házban ugyanannyian laknak és Kinga meg is kérdezett mindenkit. Az alábbi sodrófa diagram (doboz ábra) szemlélteti a feljegyzett adatokat:



a) Döntse el az ábrához tartozó állításokról, hogy igazak, hamisak vagy nem dönthetők el egyértelműen a megadott adatok alapján. Válaszát jelölje X-szel a táblázat megfelelő rubrikájában! (4 pont)

Állítás	Igaz	Hamis	Nem dönthető el
Az A házban kétszer annyi a 60 év feletti lakosok száma, mint a B házban.			
A B házban a legfeljebb 45 éves lakosok száma megegyezik a C házban legalább 70 éves lakosok számával.			
A B lakásban a legalacsonyabb az átlagéletkor.			
Az A lakásban nem lakik kiskorú.			

Egy nap a postás az egyik társasházba kézbesített, amikor a második emeleten lévő 6 lakáshoz szállított leveleket figyelmetlenség miatt összekeverte. Csak két lakás kapta a saját levelét (nem tudjuk, melyik kettő), a másik 4 lakás postái összekavarodtak.

b) Hányféleképpen kaphatták a leveleket a lakók? (5 pont)

c) Fogalmazza meg az alábbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét! (2 pont)

„Ha egy négyszög paralelogramma, akkor van két párhuzamos oldala."

Megoldás:

a)

Állítás	Igaz	Hamis	Nem dönthető el
Az **A** házban kétszer annyi a 60 év feletti lakosok száma, mint a **B** házban.	**X**		
A **B** házban a legfeljebb 45 éves lakosok száma megegyezik a **C** házban legalább 70 éves lakosok számával.	**X**		
A **B** lakásban a legalacsonyabb az átlagéletkor.			**X**
Az **A** lakásban nem laknak kiskorúak.		**X**	

(Minden helyes válasz 1 pont)

b) Azt, hogy melyik két lakás kapta a saját levelét, $\binom{6}{2}=15$-féleképpen választhatjuk ki.

(1 pont)

A maradék 4 lakás között összesen $4!=24$-féleképpen oszthatja ki a leveleket a postás.

(1 pont)

Kiszámoljuk a kedvezőtlen esetek számát:

I. eset: 1 lakás a saját levelét kapja a 4 közül: $\binom{4}{1}\cdot 2=8$ eset.

II. eset: 2 lakás kapja a saját levelét a 4 közül: $\binom{4}{2}\cdot 1=6$ eset.

III. eset: Mind a 4 lakás a saját levelét kapja: 1 eset. (2 pont)

(Az nem külön eset, hogy 3 lakás kapja a saját levelét, hiszen ebből egyértelműen következne, hogy a 4. is a sajátját kapja.)

Összesen tehát $15\cdot(24-8-6-1)=$ **135 -féleképpen kaphatták a leveleket a lakók**.

(1 pont)

c) Az állítás megfordítása:

Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldala, akkor paralelogramma. (1 pont)

A megfordított állítás **HAMIS** (ellenpélda: trapéz). (1 pont)

Összesen: 11 pont

3. Adott az egész számok halmazának $[-7;19]$ intervallumán értelmezett három halmaz:

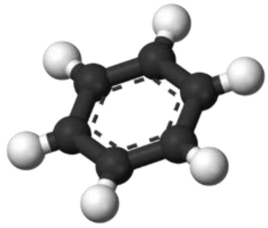
$A = \{20$-nál kisebb (pozitív) prímszámok$\}$,

$B = \{-6$-nál nagyobb, de 11-nél nem nagyobb páratlan számok$\}$,

$C = \{x \mid (x+2)(x-8) \le 0\}$.

a) Adja meg az $A \cup B \cup C$ halmaz számosságát! (4 pont)

Áron kémiaórán az aromás szénhidrogénekről tanul, azonban szívesebben foglalkozik a matematikával, mint a kémiával. Az ábrán lévő benzolgyűrű fehér hidrogénjeit szabályos hatszögként egy koordináta-rendszerben ábrázolta, és így két egymás mellett lévő hidrogénatom koordinátái $(4;2)$ és $(8;2)$ lettek, illetve tudjuk, hogy mind a hat pont az első síknegyedben található.



b) Adja meg a hatszög középpontjának koordinátáit! (5 pont)

Következő héten tesztet írnak, ahol az egyik kérdésben Áronnak az ammónium-dihidrogén-foszfát képletét kell felírnia. Mivel előző héten egész órán csak rajzolgatott, ezért nem emlékszik pontosan a képletre. Azt viszont tudja, hogy milyen betűk és számok szerepeltek benne. Ezek a következők: H; H; N; P; O és 2; 4; 4. A képlet betűvel kezdődik, és minden betű után legfeljebb egy szám állhat.

c) Hányszor kellene Áronnak kitöltenie a tesztet, hogy biztosan eltalálja a vegyület képletét, ha minden lehetőséget csak egyszer próbál ki? (4 pont)

Megoldás:

a) $A = \{2;3;5;7;11;13;17;19\}$

$B = \{-5;-3;-1;1;3;5;7;9;11\}$ (1 pont)

Az $(x+2)(x-8)$ kifejezés egy felfelé nyíló parabolaként ábrázolható, melynek két zérushelye -2 és 8, ezért $C = \{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$. (1 pont)

Adjuk meg a halmazoknak és a metszeteiknek a számosságát!

$|A| = 8$, $|B| = 9$ és $|C| = 11$

$|A \cap B| = 4$, $|A \cap C| = 4$, $|B \cap C| = 5$ és $|A \cap B \cap C| = 3$ (1 pont)

A szitaformula alapján az $A \cup B \cup C$ halmaz számossága:

$|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C| = 8+9+11-4-4-5+3 = \mathbf{18}$.

(1 pont)

b) Ha egy szabályos hatszög minden csúcsát összekötjük a középpontjával, akkor szabályos háromszögekre bontjuk a hatszöget, tehát egy szabályos háromszög harmadik csúcsának koordinátáit keressük. (1 pont)

A háromszög oldalainak hosszát megkaphatjuk a két megadott pont távolságából:

$\sqrt{(4-8)^2+(2-2)^2} = 4$. (1 pont)

A háromszög magasságát megkaphatjuk a $\sin 60° = \frac{m}{4}$ képlettel, innen $m = 2\sqrt{3}$. (1 pont)

A megadott oldal oldalfelező pontja: $\left(\frac{4+8}{2}; \frac{2+2}{2}\right) = (6; 2)$. (1 pont)

Ahhoz, hogy megkapjuk a harmadik csúcsot, az oldalfelező pontot el kell tolnunk a $\left(0; 2\sqrt{3}\right)$ vektorral, vagyis az *y* koordinátáját megnöveljük $2\sqrt{3}$-mal.

Így tehát a hatszög középpontjának koordinátái $\boldsymbol{\left(6; 2+2\sqrt{3}\right)}$. (1 pont)

c) Először határozzuk meg a betűk sorrendjét!

Ez az ismétléses permutáció képlete alapján $P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$. (1 pont)

Mivel a képlet betűvel kezdődik, összesen 5 helyre kerülhetnek a számok, ezek közül kell hármat kiválasztani, ez $\binom{5}{3} = 10$-féleképpen lehetséges. (1 pont)

A számok sorrendje 3-féle lehet. (1 pont)

Összesen tehát $60 \cdot 10 \cdot 3 =$ **1800-szor kellene kitöltenie a tesztet.** (1 pont)

Összesen: 13 pont

4. Zsófi pénteken a Nyíregyháza–Szeged-vasútvonalon utazik nagymamájához, melynek a hossza 360 km. Nyíregyházától Kecskemétig, ami az út háromnegyedénél helyezkedik el, a vonat v átlagsebességgel közlekedik. Kecskeméttől Szegedig viszont a sínek jobb állapota miatt 1,2-szer akkora átlagsebességgel tud menni, mint az első szakaszon

a) Bizonyítsa be, hogy a vonat átlagsebessége pénteken a teljes Nyíregyháza–Szeged szakaszon v függvényében $\frac{24}{23}v$! (3 pont)

Vasárnap hazafelé a vonatnak felsővezeték-szakadás miatt 2 órát várakoznia kellett Kecskeméten, így a Szegedtől Nyíregyházáig tartó utat 0,6-szor akkora átlagsebességgel tette meg, mint pénteken.

b) Hány km/h volt a vonat átlagsebessége pénteken, és hány óra alatt tette meg az utat Zsófi vasárnap? (8 pont)

Zsófi a nagymamájához egy évben 10-szer utazik (és természetesen a látogatást követően haza is megy mindig). Mikor vonatozik, 10% eséllyel nem vásárol jegyet. Tudjuk, hogy a kalauzok jól végzik a munkájukat, mindig elkapják a bliccelőket.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy Zsófit egy évben legfeljebb 3-szor büntetik meg, mert nem vásárolt jegyet? (3 pont)

Megoldás:

a) Az első szakaszt a vonat $t_1 = \frac{0,75 \cdot 360}{v} = \frac{270}{v}$ idő alatt teszi meg. (1 pont)

A második szakaszt pedig $t_2 = \frac{360 \cdot 0,25}{1,2v} = \frac{75}{v}$ idő alatt. (1 pont)

A vonat teljes útra vonatkoztatott átlagsebessége: $\frac{360}{t_1 + t_2} = \frac{360}{\frac{345}{v}} = \frac{24}{23}v$. (1 pont)

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

b) Vasárnap a vonat átlagsebessége: $\overline{v}_2 = \frac{360}{\frac{270}{v} + 2 + \frac{90}{1,2v}} = \frac{360v}{345 + 2v}$. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható az alábbi egyenlet:

$\frac{360v}{345 + 2v} = 0,6 \cdot \frac{24}{23}v$ (1 pont)

$8280v = 4968v + 28,8v^2$

$28,8v^2 - 3312v = 0$

$v(28,8v - 3312) = 0$ (1 pont)

Az egyenlet két megoldása $v_1 = 115$ és $v_2 = 0$, viszont v_2 nem lesz jó megoldás. (2 pont)

115 km/h-s sebességgel számolva $t_1 = \frac{270}{115} = \frac{54}{23}$ h és $t_2 = \frac{90}{1,2 \cdot 115} = \frac{15}{23}$ h. (1 pont)

A vasárnapi utat $\frac{54}{23}+2+\frac{15}{23}=\mathbf{5\,óra}$ alatt tette meg a vonat. (1 pont)

A vonat pénteki átlagsebessége $115\cdot\frac{24}{23}=\mathbf{120\,km/h}$ volt. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy Zsófi nem bliccel: $1-0{,}1=0{,}9$.

A binomiális eloszlás képletét használva:

$$P(0)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 0{,}9^{20}\approx 0{,}1216$$

$$P(1)=\binom{20}{1}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 0{,}9^{19}\approx 0{,}2702$$

$$P(2)=\binom{20}{2}\cdot 0{,}1^{2}\cdot 0{,}9^{18}\approx 0{,}2852$$

$$P(3)=\binom{20}{3}\cdot 0{,}1^{3}\cdot 0{,}9^{17}\approx 0{,}1901$$ (2 pont)

Ezeket a valószínűségeket összeadva körülbelül **0,8671 valószínűséggel büntetik meg legfeljebb háromszor Zsófit.** (1 pont)

Összesen: 14 pont

Az I. rész során szerezhető maximális pontszám: 51 pont

II.

5. A majomhimlő teszt érzékenysége változó a megfertőződést követő idő függvényében. A fertőzés korai szakaszában a teszt kisebb bizonyossággal szűri ki, hogy tényleg fertőzött-e a beteg. Ha valaki 1-3 napja fertőződött meg majomhimlővel, a teszt 0,2 valószínűséggel lesz pozitív, 4-5 nap elteltével 60% az esély erre, míg a 6-14. napokban az arány 80%-ra nő. A fertőzés minden esetben pontosan 14 napig tart. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy ember minden nap egyforma valószínűséggel fertőződik meg.)

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a betegség 14 napos lefolyása alatt az éppen fertőzött egyén negatív tesztet produkál, ha nem tudjuk, hogy a betegségének hányadik napján teszteljük? (4 pont)

Az előző információkon kívül azt is tudjuk, hogy bármikor is végezzük el egészséges emberen, a teszt 5%-os valószínűséggel ad fals pozitív eredményt, valamint a teljes lakosságban a fertőzöttek aránya 2%.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a teszt eredménye megfelel a valóságnak? (8 pont)

Egy rendelőben a tesztelésre várakozó betegek átlagmagassága 160 cm. Az 5 legmagasabb beteg átlagmagassága 180 cm, a többieké 153,75 cm.

c) Hány nő és hány férfi várakozik a rendelőben, ha tudjuk, hogy 2,5-szer annyi nő van, mint férfi? (4 pont)

Megoldás:

a) Mivel a betegség lefolyása mindig 14 napos, kiszámolhatjuk, hogy mennyi a valószínűsége, hogy valakit a fertőzésének a megadott időintervallumaiban tesztelnek:

$1-3.\ \text{nap}: \frac{3}{14};$

$4-5.\ \text{nap}: \frac{2}{14};$

$6-14.\ \text{nap}: \frac{9}{14}.$ (1 pont)

Kiszámolhatjuk azt is, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki beteg és negatív tesztet produkál az egyes időintervallumokban:

$1-3.\ \text{nap}: 1-0,2=0,8;$

$4-5.\ \text{nap}: 1-0,6=0,4;$

$6-14.\ \text{nap}: 1-0,8=0,2.$ (1 pont)

A keresett valószínűséget megkaphatjuk az egyes időintervallumokhoz tartozó valószínűségek szorzatösszegeként:

$P(\text{beteg és negatív teszt}) = \frac{3}{14}\cdot 0,8+\frac{2}{14}\cdot 0,4+\frac{9}{14}\cdot 0,2=\mathbf{\frac{5}{14}\approx 0,3571}.$ (2 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy egészséges embert vizsgálva a teszt negatív: $1-0,05=0,95$ (1 pont)

A teljes lakosságnak a 98%-a egészséges.

Készítsünk valószínűségi táblázatokat a „beteg/egészséges” és a „pozitív teszt/negatív teszt” események kombinációinak bekövetkezéséről az egyes időintervallumokban!

1–3. nap: (1 pont)

	pozitív teszt	**negatív teszt**
beteg	$0,02\cdot 0,2=0,004$	$0,02\cdot(1-0,2)=0,016$
egészséges	$0,98\cdot 0,05=0,049$	$0,98\cdot 0,95=0,931$

4–5. nap: (1 pont)

	pozitív teszt	**negatív teszt**
beteg	$0,02\cdot 0,6=0,012$	$0,02\cdot(1-0,6)=0,008$
egészséges	$0,98\cdot 0,05=0,049$	$0,98\cdot 0,95=0,931$

6–14. nap: (1 pont)

	pozitív teszt	**negatív teszt**
beteg	$0,02\cdot 0,8=0,016$	$0,02\cdot(1-0,8)=0,004$
egészséges	$0,98\cdot 0,05=0,049$	$0,98\cdot 0,95=0,931$

Az, hogy a teszt eredménye megfelel a valóságnak, azt jelenti, hogy beteg emberen elvégezve pozitívat vagy egészséges emberen elvégezve negatívat jelez. (1 pont)

1–3. nap: $P(1-3.)=0,004+0,931=0,935$.

4–5. nap: $P(4-5.)=0,012+0,931=0,943$.

6–14. nap: $P(6-14.)=0,016+0,931=0,947$. (1 pont)

Ezeket a valószínűségeket súlyoznunk kell az „időintervallumok bekövetkezésének” valószínűségével:

$P=0,935\cdot\frac{3}{14}+0,943\cdot\frac{2}{14}+0,947\cdot\frac{9}{14}\approx 0,9439$. (1 pont)

Tehát a keresett valószínűség 0,9439. (1 pont)

c) Jelölje a férfiak számát x, ekkor a nők száma: $2,5x$. (1 pont)

A magasságok összegét a feladat alapján felírhatjuk kétféle módon, megoldandó a két felírásból alkotott egyenlet:

$3,5x \cdot 160 = 5 \cdot 180 + (3,5x - 5) \cdot 153,75$ (1 pont)

$21,875x = 131,25$

$x = 6$ (1 pont)

Tehát 6 férfi és 15 nő várakozik a rendelőben. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6.

a) Bizonyítsa be az alábbi állítást!

$$\mathbf{5 \mid 7^n - 2^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)}$$ **(6 pont)**

b) Hány valós megoldása van az alábbi egyenletnek a *p* paraméter függvényében? $\left(p \in \mathbb{R}\right)$

$$\mathbf{4p = \sqrt{\left(x^2 - 2x - 15\right)^2} - 2}$$ **(10 pont)**

Megoldás:

a) Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. Nézzük meg, hogy az állítás teljesül-e $n = 1$-re!

   $7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5$, ennek osztója az 5, tehát az állítás teljesül. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra is!

   $5 \mid 7^k - 2^k$ (1 pont)

3. Vizsgáljuk meg, hogy öröklődik-e a tulajdonság $k+1$-re is!

   $5 \mid 7^{k+1} - 2^{k+1}$ (1 pont)

   $5 \mid 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k$

   $5 \mid 7^k - 2^k + 6 \cdot 7^k - 2^k$

   $5 \mid \underbrace{7^k - 2^k}_{\text{indukciós feltevés}} + 6 \cdot \underbrace{\left(7^k - 2^k\right)}_{\text{indukciós feltevés}} + 5 \cdot 2^k$, mely összeg minden tagja biztosan osztható 5-tel.

   (2 pont)

   Így a teljes összeg osztható lesz 5-tel, **öröklődik a tulajdonság, az állítást bizonyítottuk.** (1 pont)

Alternatív megoldás:

a) Bizonyítsuk az állítást az 5-tel való osztás lehetséges maradékainak vizsgálatával!

7 hatványai: 7, 49, 343, 2401, 16807, 117649, …

Felfedezhetünk egy 4-tagú periódust a végződésekben: 7, 9, 3, 1, … (1 pont)

2 hatványai: 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

Szintén 4-tagú periódust alkotnak a végződések: 2, 4, 8, 6, … (1 pont)

Az 5-tel való osztás maradékát az fogja meghatározni, hogy a 7^n és a 2^n végződéseinek különbségei 5-tel osztva milyen maradékot adnak.

Készítsünk táblázatot a végződésekről! (2 pont)

Végződések	$\mathbf{7^n}$	7	9	3	1
	$\mathbf{2^n}$	2	4	8	6
	$\mathbf{7^n - 2^n}$	5	5	–5	–5

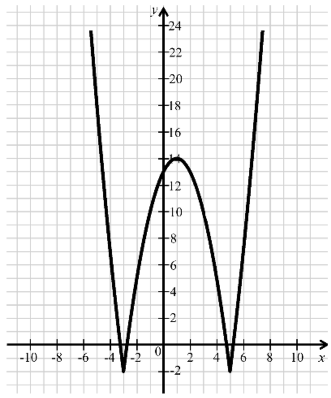
Láthatjuk, hogy a táblázat alsó sorában minden esetben 5-tel osztható szám van. (1 pont)

Így tehát biztos, hogy a különbség osztható lesz 5-tel, **az állítást bizonyítottuk**. (1 pont)

b) A kifejezés átírható $4p = \sqrt{\left(x^2 - 2x - 15\right)^2} - 2 = \left|x^2 - 2x - 15\right| - 2$ alakra. (1 pont)

Teljes négyzetté alakítjuk:

$\left|x^2 - 2x - 15\right| - 2 = \left|\left(x-1\right)^2 - 16\right| - 2$ (1 pont)



Az abszolútértékben lévő másodfokú polinom minimum értéke $y = -16$, ezt az abszolútérték miatt az y tengelyre tükrözve, majd kivonva belőle 2-t egy lokális maximumot kapunk, amelynek értéke $y = 14$. (2 pont)

A másik két kritikus pont a másodfokú polinom zérushelyeiből adódik, amelyeket az y tengelyen 2-vel lefelé mozgatva $y = -2$ lesz az értékük. (1 pont)

Ha $4p < -2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p < -\frac{1}{2}}$**, akkor nincs megoldás**. (1 pont)

Ha $4p = -2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p = -\frac{1}{2}}$**, akkor 2 megoldás van.** (1 pont)

Ha $-2 < 4p < 14 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{-\frac{1}{2} < p < \frac{7}{2}}$**, akkor 4 megoldás van.** (1 pont)

Ha $4p = 14 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p = \frac{7}{2}}$**, akkor 3 megoldás van.** (1 pont)

Ha $4p > 14 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p > \frac{7}{2}}$**, akkor 2 megoldás van.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

7. Dávid egy benzinkúton dolgozik és szeretne egy jachtot vásárolni magának. Álmait pusztán saját fizetéséből nem tudja finanszírozni, ezért kénytelen felvenni hitelt a banktól. A bank a következő hitelkonstrukciót ajánlotta neki:

- **Felvehető hitel összege: 100 millió Ft**
- **Futamidő: 20 év**
- **Éves kamat nagysága: 1%**
- **Évenkénti törlesztés**
- **Az összeg minden év végén kamatozik, az első törlesztés a második év elején esedékes.**

a) Összesen mennyi pénzt fizet vissza Dávid, ha elfogadta a bank hitelajánlatát (tartozását a 21. év elején egyenlíti ki teljesen)? A feladat megoldása során pontos értékkel számoljon, és válaszát ezresekre kerekítve adja meg! (9 pont)

Dávid az új hajójával gyakran látogatja három kedvenc szigetét, melyeket egy térképen ábrázolva a következő koordinátákat kapjuk: $A(81;40)$, $B(75;40)$ és $C(81;48)$.

b) Bizonyítsa be, hogy az *ABC* háromszög derékszögű! (3 pont)

c) Írja fel a három sziget által meghatározott háromszög körülírható körének egyenletét! (4 pont)

Megoldás:

a) Írjuk fel az év eleji és év végi pénzmozgásokat, úgy, hogy a törlesztőrészletet *A*-val jelöljük:

1. év végén: $100\,\text{mFt}\cdot 1,01$; (1 pont)

2. év elején: $100\,\text{mFt}\cdot 1,01-A$;

2. év végén: $(100\,\text{mFt}\cdot 1,01-A)\cdot 1,01=100\,\text{mFt}\cdot 1,01^2-1,01\cdot A$; (1 pont)

…;

20. év végén: $100\,\text{mFt}\cdot 1,01^{20}-1,01^{19}\cdot A-...-1,01\cdot A$; (1 pont)

21. év elején: $100\,\text{mFt}\cdot 1,01^{20}-A\cdot\left(1,01^{19}+1,01^{18}+...+1,01+1\right)=0$. (1 pont)

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozatként írható le, ahol: $a=1$, $q=1,01$, és $n=20$.

Így az összege: $S_{20}=a\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}=1\cdot\dfrac{1,01^{20}-1}{1,01-1}\approx 22,0190$. (2 pont)

Tehát a törlesztőrészlet $A=\dfrac{100\,\text{mFt}\cdot 1,01^{20}}{S_{20}}=5\,541\,531,489$. (1 pont)

Ezt Dávid 20-szor fizeti ki, vagyis összesen $5\,541\,531,489\cdot 20\approx 110\,830\,629$ forintot fizet vissza a banknak. (1 pont)

Ez az összeg ezresekre kerekítve **110 831 000 forint**. (1 pont)

b) Számoljuk ki a háromszög oldalainak hosszát:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(75-81)^2 + (40-40)^2} = 6$;

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(81-81)^2 + (48-40)^2} = 8$;

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(81-75)^2 + (48-40)^2} = 10$. (2 pont)

A 6, 8 és 10 egy pitagoraszi számhármas $\left(6^2 + 8^2 = 10^2\right)$, így **a háromszög derékszögű**.

(1 pont)

c) Egy derékszögű háromszögben a körülírható körnek a középpontja az átfogó felezőpontja, és a sugara az átfogó fele. (1 pont)

A sugár így $\frac{\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(81-75)^2 + (48-40)^2}}{2} = 5$. (1 pont)

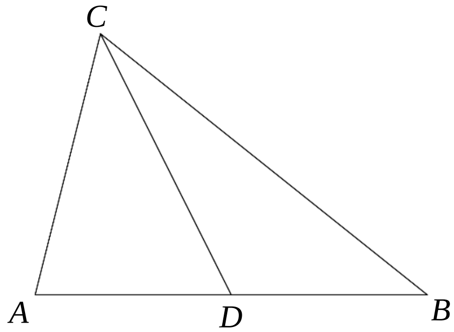
A kör középpontja $O\left(\frac{75+81}{2}; \frac{40+48}{2}\right) = O(78;44)$. (1 pont)

Így a körülírható kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-78)^2 + (y-44)^2 = 25}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8. Adott az ABC háromszög, ahol $AC = 6$ cm, $BC = 14$ cm és a CD szakasz, azaz a C csúcshoz tartozó súlyvonal hossza 9 cm.

a) Mekkora a háromszög területe? (9 pont)



Az $ADBC$ gráf 4 fő egy népszerű közösségi oldalon, a MyElod-on való egymás közötti ismeretségi hálóját ábrázolja. Ha ehhez a társasághoz hozzáadunk még 12 főt (ők egymást nem ismerik), akik közül 3-an csak B-t, a többiek pedig csak A-t ismerik.

b) Hány új ismeretséget köthet még egymás között ez a 16 ember? (3 pont)

c) Adja meg az $f(x) = \frac{\sin(2x)+3}{4}$ függvény értékkészletét! (4 pont)

Megoldás:

a) Használjuk az $AD = DB = c$ jelölést, illetve a D-nél lévő két szög legyen α és $180° - \alpha$.

Ekkor felírható két koszinusztétel az ADC és DBC háromszögekre egy egyenletrendszerként:

$$\left.\begin{aligned} 6^2 &= 9^2 + c^2 - 2\cdot 9\cdot c\cdot\cos\alpha \\ 14^2 &= 9^2 + c^2 - 2\cdot 9\cdot c\cdot\cos(180° - \alpha) \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Mivel a $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, ezért az egyenletrendszer a következőképpen módosul:

$$\left.\begin{aligned} 6^2 &= 9^2 + c^2 - 2\cdot 9\cdot c\cdot\cos\alpha \\ 14^2 &= 9^2 + c^2 + 2\cdot 9\cdot c\cdot\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

A két egyenletet összeadva a $\cos\alpha$-t tartalmazó tagok kiesnek:

$232 = 162 + 2c^2$ (1 pont)

Innen $c = \sqrt{35}$, és $2c = AB = 2\sqrt{35}$. (1 pont)

A háromszög félkerülete így $\frac{6+14+2\sqrt{35}}{2} = \frac{20+2\sqrt{35}}{2} = 10+\sqrt{35}$. (1 pont)

A Hérón-képletet felhasználva a háromszög területe:

$T = \sqrt{\left(10+\sqrt{35}\right)\left(10+\sqrt{35}-6\right)\left(10+\sqrt{35}-14\right)\left(10+\sqrt{35}-2\sqrt{35}\right)} \approx$ **35,14 te**. (2 pont)

b) Az $ADBC$ gráfban 5 ismeretség van.

Ehhez, ha hozzávesszük a 12 újat, akkor 17 ismeretségünk lesz összesen. (1 pont)

Ahhoz, hogy megkapjuk hány ismeretség hiányzik a 16 ember között, először ki kell számolnunk a teljes gráf éleinek számát:

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{16\cdot 15}{2} = 120$. (1 pont)

Ebből kivonva az eredeti 17 ismeretségünket megkapjuk, hogy **103 ismeretséget köthetnek még egymás között**. (1 pont)

c) A $\sin x$ függvény értékkészlete $y \in [-1;1]$. (1 pont)

A szinuszfüggvényen belüli x kétszeres szorzása változótranszformáció, így nem változtat az értékkészleten. (1 pont)

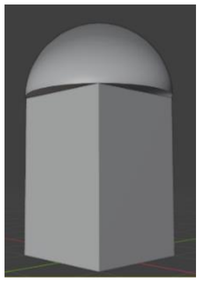
A zárójelen kívüli $+3$ az y tengely mentén pozitív irányba való eltolást jelent, így az értékkészlet $y \in [2;4]$-re módosul. (1 pont)

Végül a 4-gyel való osztás az $f(x)$ függvény értékkészletét $\boldsymbol{y \in [0,5;1]}$-re módosítja.

(1 pont)

Összesen: 16 pont

9. Matematikusok egy csoportja, *„A Számtalan Harmónia Rendje”* szobrot állít az erdő közepén. A szobor szerkezetét a jobb oldali ábra mutatja: egy négyzet alapú hasábra helyeznek egy félgömböt úgy, hogy a félgömb határoló köre a négyzet köré írható köre. A hasáb térfogata $24\ \mathrm{m}^3$. A matematikusok ki is szeretnék festeni a szobrot, a hasáb látható felületeit ezüst színű festékkel (az alját és a félgömbbel érintkező részét nem festik ki), a félgömb látható felületeit (a hasábbal érintkező részét nem festik ki) pedig arany színűvel.



a) Mekkorának válasszák a hasáb alapélét, hogy minimális legyen a szobor lefestendő felülete? (9 pont)

Végül egyéb megfontolásból a hasáb alapéle 2 méteres lett, illetve a matematikusok időtállóbb szobrot szeretnének, ezért úgy döntöttek, hogy az alsó részét tömör ezüstből, a felső részét pedig tömör, 24 karátos aranyból fogják megépíteni. Tudjuk, hogy az ezüst grammonkénti ára 380 Ft, míg az aranyé 6600 Ft. A használt anyagok sűrűsége: $\rho_{\text{ezüst}} = 10{,}49\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ és $\rho_{\text{arany}} = 19{,}32\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

b) Mennyibe kerül a szobor megépítése? (4 pont)

A szobor elkészülését a matematikusok közös integrálással ünneplik meg. Az $f(x) = x^2 - 4x - 5$ függvényt szeretnék integrálni a $[-3;7]$ intervallumon.

c) Adja meg a határozott integrál értékét! (3 pont)

Megoldás:

a) Jelöljük a hasáb alapélét a-val és a magasságát m-mel!

Ekkor a hasáb térfogata $V = a^2 \cdot m = 24$, innen $m = \frac{24}{a^2}$. (1 pont)

A hasábból lefestendő felület $A_{\text{hasáb lef.}} = 4 \cdot a \cdot m = 4 \cdot a \cdot \frac{24}{a^2} = \frac{96}{a}$. (1 pont)

A félgömb alapkörének sugara egyenlő a hasáb alapjának átlójának felével, tehát $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ -val.

A félgömb palástjának felülete $A_{\text{palást}} = 2r^2\pi = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \pi = a^2\pi$. (1 pont)

A félgömb határoló körének területe $T_{\text{kör}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{2}a^2\pi$, viszont nem kell lefestenünk a hasáb tetejét, amelynek területe $T_{\text{négyzet}} = a^2$. (1 pont)

Így tehát a teljes lefestendő felület a függvényében:

$$A(a) = \frac{96}{a} + a^2\pi + \frac{1}{2}a^2\pi - a^2 = \frac{96}{a} + \left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)a^2.$$ (1 pont)

Ahhoz, hogy megkapjuk a minimális felületet, meg kell vizsgálnunk, hogy a felület függvényének első deriváltja hol egyenlő 0-val.

$A'(a) = -\frac{96}{a^2} + (3\pi - 2)a = 0$ (1 pont)

Mivel $a^2 \neq 0$, felszorozhatunk vele:

$-96 + (3\pi - 2)a^3 = 0$;

$a^3 = \frac{96}{3\pi - 2}$; (1 pont)

$a \approx 2{,}347$. (1 pont)

Hogy ellenőrizzük, hogy tényleg lokális minimumot kaptunk-e, behelyettesítjük a kapott értéket a második deriváltba:

$A''(a) = \frac{192}{a^3} + 3\pi - 2$;

$A''\left(\sqrt[3]{\frac{96}{3\pi - 2}}\right) \approx 22{,}27 > 0$, tehát tényleg lokális minimumot kaptunk. (1 pont)

Tehát a hasáb alapélének 2,347 méteresnek kell lennie ahhoz, hogy a lefestendő felület minimális legyen.

b) A hasáb térfogata a feladat szövege alapján: $V_{\text{hasáb}} = 24 \text{ m}^3 = 24\,000\,000 \text{ cm}^3$. (1 pont)

A félgömb sugara $r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2$.

$V_{\text{félgömb}} = \frac{4\pi r^3}{6} = \frac{4\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\right)^3}{6} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \approx 5{,}9238439 \text{ m}^3 \approx 5\,923\,844 \text{ cm}^3$. (1 pont)

A tömeg felírható a sűrűség és a térfogat szorzataként: $m = \rho \cdot V$.

Ebbe a képletbe behelyettesítve $m_{\text{hasáb}} = 10{,}49 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 24\,000\,000 \text{ cm}^3 = 251\,760\,000 \text{ g}$ és

$m_{\text{félgömb}} = 19{,}32 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 5\,923\,844 \text{ cm}^3 = 114\,448\,666{,}1 \text{ g}$. (1 pont)

A bálvány megépítésének költsége tehát:

$251\,760\,000 \cdot 380 + 114\,448\,666{,}1 \cdot 6\,600 =$ **851 029 996 260 Ft.** (1 pont)

c) $\int_{-3}^{7} x^2 - 4x - 5 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x\right]_{-3}^{7}$ (1 pont)

A Newton–Leibniz-formulát alkalmazva:

$\frac{7^3}{3} - 2 \cdot 7^2 - 5 \cdot 7 - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 2 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3)\right) = -\frac{20}{3}$. (1 pont)

A határozott integrál értéke tehát $-\frac{20}{3}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

A II. rész során szerezhető maximális pontszám: 64 pont