PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2026. február 14.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2026. február 14.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
ExxonMobil

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{3|x|+2}{|x-1|}=3$ **(7 pont)**

b) $2\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sin 2x=-2\sqrt{3}\cos^2 x$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Ki kell kötni a tört nevezőjére: $x\neq 1$. (1 pont)

Mindkét oldalt megszorozva $|x-1|$-gyel: $3|x|+2=3|x-1|$ (1 pont)

Itt három esetet kell megvizsgálni: (1 pont)

I. eset: ha $x<0$, akkor $-3x+2=-3(x-1)$

Rendezve az egyenletet: $2=3$, tehát ezen az ágon nincs megoldás. (1 pont)

II. eset: ha $0\le x<1$, akkor $3x+2=-3(x-1)$

Rendezve az egyenletet: $x=\dfrac{1}{6}$. (1 pont)

III. eset: ha $x>1$, akkor $3x+2=3(x-1)$

Rendezve az egyenletet: $2=-3$, tehát ezen az ágon nincs megoldás. (1 pont)

A végső megoldás az $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{6}}$, ami a kikötésnek is megfelel, beleesik az $0<x<1$ tartományba, és ellenőrizve is teljesül az eredeti egyenlőség. (1 pont)

b) A $\sin 2x=2\sin x\cos x$ azonosságot felhasználva, és rendezve az egyenletet:

$2\sin^2 x-2\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cdot\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x=0$. (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát leoszthatjuk $\cos^2 x$-szel, mivel a $\cos x=0$ esetben az eredeti egyenletnek nincs valós megoldása: (1 pont)

$2\,\mathrm{tg}^2 x-2\left(\sqrt{3}+1\right)\mathrm{tg}\,x+2\sqrt{3}=0$. (1 pont)

Bevezetve $y=\mathrm{tg}\,x$-et, az új egyenlet gyökei:

$2y^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)y+2\sqrt{3}=0$, $y_1=\sqrt{3}$; $y_2=1$. (1 pont)

Visszahelyettesítve ezeket a gyököket: $\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3}$ és $\mathrm{tg}\,x=1$. (1 pont)

Tehát a megoldás: $\boldsymbol{x_1=\dfrac{\pi}{3}+k\pi}$ és $\boldsymbol{x_2=\dfrac{\pi}{4}+l\pi}$, $\boldsymbol{k,l\in\mathbb{Z}}$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

2. Simon és Áron világéletükben a Belvárosban éltek és mindig is bosszantotta őket, hogy az autós forgalom által okozott finom szálló por és a nitrogén-dioxid koncentrációk gyakran túllépik az egészséges határértéket.

a) A probléma megoldására Sir Benzington alternatív, környezetbarát üzemanyagát, az Allinolt szeretnék reprodukálni. Ehhez bioetanolra van szükségük, amelyből rendelkezésükre áll két tartálynyi. Sajnos nem tudják, hogy ezek milyen töménységű oldatot tartalmaznak, csak arra jöttek rá, hogy ha 3:4 arányban keverik össze őket, akkor 70% a kapott oldat töménysége, ha pedig 5:1 arányban, akkor 82%. Milyen töménységűek az általuk talált bioetanolok?
(7 pont)

b) Áron egy szombat délután úgy döntött, hogy felmérést készít a budapesti elektromos autóállományról. Mivel több százezer autó közlekedik a városban naponta, ezt lehetetlen lenne egyedül felmérnie, ezért csupán egy 1000 autós mintát szeretne vizsgálni. Ki is állt a Kálvin térre, és lefotózta az első 1000 autót, ami elhaladt mellette. (Minden autóról pontosan egy fotó készült.) Utólag észrevette, hogy az autók gyorsasága miatt 280 fotó készítéskor elmosódott. Mekkora a valószínűsége, hogy ha Simonnak 15 különböző fotót találomra megmutat, abból legfeljebb 3 elmosódott? **(4 pont)**

Megoldás:

a) A kétféle összekeverés táblázatban összefoglalva:

Töménység	**Oldat**	**Oldott anyag**
x	3	$3\cdot x$
y	4	$4\cdot y$
70%	7	$7\cdot 0,7$

(1 pont)

Töménység	**Oldat**	**Oldott anyag**
x	5	$5\cdot x$
y	1	y
82%	6	$6\cdot 0,82$

(1 pont)

A táblázatok utolsó oszlopaiból a következő egyenletrendszer kapható:

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y&=7\cdot 0,7 \\ 5x+y&=6\cdot 0,82 \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Kifejezve y-t: $y=4,92-5x$,

behelyettesítve az első egyenletbe: $3x+4\cdot(4,92-5x)=4,9$,

majd x-et kifejezve: $x=0,8694$. (1 pont)

Visszahelyettesítve bármelyik egyenletbe, majd rendezve: $y=0,5729$. (1 pont)

A tartályokban talált bioetanolok töménysége 86,94% és 57,29%. (1 pont)

b) Hipergeometrikus eloszlást alkalmazunk, négyféle különböző esetet kell összeszámolnunk; amikor 0, 1, 2 vagy 3 elmosódott fotót mutat meg. (1 pont)

Ha 0 fotó van elmosódva: $\dfrac{\binom{720}{15}}{\binom{1000}{15}} = 0,007$;

1 fotó van elmosódva: $\dfrac{\binom{720}{14}\cdot\binom{280}{1}}{\binom{1000}{15}} = 0,0414$;

2 fotó van elmosódva: $\dfrac{\binom{720}{13}\cdot\binom{280}{2}}{\binom{1000}{15}} = 0,1142$;

3 fotó van elmosódva: $\dfrac{\binom{720}{12}\cdot\binom{280}{3}}{\binom{1000}{15}} = 0,1944$. (2 pont)

Ezen valószínűségek összege, azaz **annak a valószínűsége, hogy Simon legfeljebb 3 elmosódott fotót lát, 0,357**. (1 pont)

Összesen: 11 pont

3. Vilmos gazda farmja trapéz alakú, csúcsait jelölje *A*, *B*, *C* és *D*. Az *AB* és *CD* alapjai rendre 70 és 50 méter hosszúak, a *BC* és *DA* szárai pedig rendre 24,2 és 22,1 méteresek.

a) Bizonyítsa be, hogy a trapéz *DAB* szöge megközelítőleg 70°-os! (5 pont)

Szeretett kecskéjét, Lócit Vilmos gazda minden nap a kerítés egy pontjához köti ki egy 8 méter hosszú kötéllel, úgy, hogy a kecske a telken kívül tudjon legelni. Ez a pont a trapéz *DA* szárának *A*-hoz közelebbi negyedelőpontja.

b) Mekkora területen tud legelni Lóci, ha a kötél nem nyúlik és a teljes hossza végig a kerítésen kívül marad? Válaszát egész négyzetméterre kerekítve adja meg!

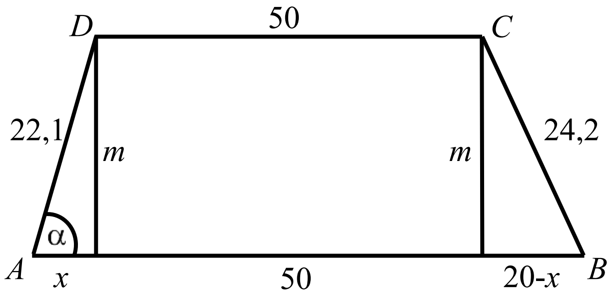
(7 pont)

c) Fogalmazza meg az alábbi állítás tagadását, és határozza meg a tagadás logikai értékét!

„A koordinátasíkon minden egyenes irányszöge az egyenesnek és az x tengelynek a hajlásszöge."

(2 pont)

Megoldás:



a) A hosszabb alapot a *C* és *D* csúcsból húzott magasságokkal három részre osztjuk, ezek *x*, 50 és $20-x$ hosszúak. (1 pont)

A létrejött derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tétellel felírható az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 22{,}1^2 &= x^2 + m^2 \\ 24{,}2^2 &= (20-x)^2 + m^2 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az egyenleteket átrendezve egyenlővé tehetjük őket egymással:

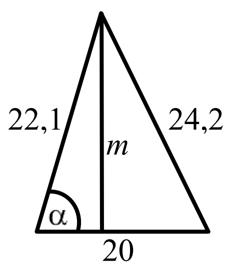
$$\left.\begin{aligned} 22{,}1^2 - x^2 &= m^2 \\ 24{,}2^2 - (20-x)^2 &= m^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 22{,}1^2 - x^2 = 24{,}2^2 - (20-x)^2$$ (1 pont)

Az egyenletet megoldva: $x \approx 7{,}57$ m. (1 pont)

Ebből α szög szögfüggvény segítségével megkapható: $\cos\alpha = \dfrac{7{,}57}{22{,}1} \Rightarrow \alpha \approx 69{,}97°$.

Ezzel beláttuk, hogy $\alpha \approx 70°$. (1 pont)

Alternatív megoldás:



a) A hosszabb alapot a *C* és *D* csúcsból húzott magasságokkal három részre osztjuk, ezek *x*, 50 és $20-x$ hosszúak. (1 pont)

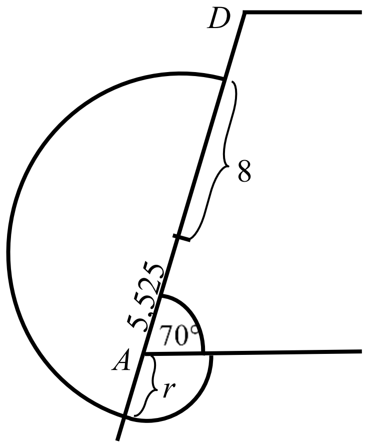
A magasságokat egybe tolva egy háromszöget kaphatunk, melynek minden oldala ismert. (2 pont)

Koszinusztételt felírva: $24,2^2 = 20^2 + 22,1^2 - 2 \cdot 20 \cdot 22,1 \cdot \cos\alpha$, (1 pont)

ebből $\cos\alpha = 0,3425 \Rightarrow \alpha \approx 69,97°$.

Ezzel beláttuk, hogy $\alpha \approx 70°$. (1 pont)

b) Lóci a trapéz A csúcsától 5,525 méterre van kikötve, ezt felhasználva ábrázolhatjuk a lelegelhető területet. (2 pont)



Az AD kerítés vonalát meghosszabbítva egy 8 méter sugarú félkör területen tud legelni: $T_{félkör} = \dfrac{8^2\pi}{2} \approx 100,53\ \text{m}^2$. (1 pont)

Ezen felül a trapéz hosszabb alapjánál egy körcikk alakú területen is legelhet, melynek sugara: $r = 8 - 5,525 = 2,475$. (1 pont)

Ezen körcikk középponti szöge a DAB szög mellékszöge, azaz nagysága $180° - 70° = 110°$. (1 pont)

Így a körcikk területe: $T_{körcikk} = \dfrac{110°}{360°} \cdot 2,475^2 \cdot \pi \approx 5,88\ \text{m}^2$. (1 pont)

Az összesített terület: $T = 100,53 + 5,88 \approx 106,41\ \text{m}^2$.

Vagyis Lóci egy 106 m^2-es területen tud legelni. (1 pont)

c) Az állítás tagadása: **Van olyan egyenes a koordinátasíkon, melynek irányszöge nem az egyenesnek és az *x* tengelynek a hajlásszöge.** (1 pont)

Az állítás logikai értéke: **igaz**. (1 pont)

Összesen: 14 pont

4. Bankháza városában egy iskola található, ebben az intézményben a délutáni testnevelés órákat háromféle sporttal lehet teljesíteni: fedettpályás távolba nézéssel, versenyszerű sorban állással, és stratégiai késlekedéssel. Az igazán szorgalmas diákok akár többféle sporttevékenységen is részt vehetnek. Az iskolába összesen 80 diák jár, azonban közülük 15-en felmentéssel rendelkeznek a délutáni testnevelés órák alól.

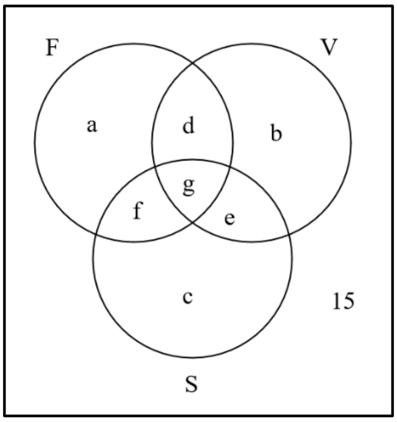
a) Az iskolában 43-an járnak fedettpályás távolba nézésre, az összes diák fele választotta a versenyszerű sorban állást, valamint 42-en szoktak stratégiai késlekedni. Akik pontosan két sporttevékenységen vesznek részt, háromszor annyian vannak, mint akik mindhármat űzik. Hányan vannak azok, akik pontosan egy sportot űznek? (7 pont)

A sport alól felmentett diákok francia kártyával szoktak játszani. Egyik délután Bori a pakli keverése közben leejtett 10 lapot. (A francia kártya összesen 52 lapot tartalmaz, minden színből – káró, treff, kőr, pikk – 13-at, valamint minden számból és figurából színenként pontosan egyet-egyet.)

b) Hányféleképpen lehetséges, hogy a 10 lap között pontosan 2 káró és egy tízes található? (4 pont)

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy nincs a leejtett lapok között kőr? (2 pont)

Megoldás:



a) A szöveg alapján felrajzolható Venn-diagram; (1 pont)

majd felírható egyenletek: (2 pont)

$a+b+c+2\cdot(d+e+f)+3g=43+40+42$

$3g=d+e+f$

$a+b+c+4g=80-15=65$

Az első két egyenletből felírható, hogy: $a+b+c+9g=125$, ebből kivonva a harmadik egyenletet: $5g=60$, vagyis $g=12$. (2 pont)

Ezt behelyettesítve: $a+b+c+4\cdot 12=65$, tehát az $a+b+c=17$. (1 pont)

Vagyis **17-en űznek pontosan egy sportot**. (1 pont)

b) Két különböző esetet kell megvizsgálni: (1 pont)

Az I. eset, hogy a leejtett lapok között szerepel a káró tízes:

$\binom{1}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{8}=363\,124\,080$. (1 pont)

A II: eset, hogy a leejtett lapok között nem szerepel a káró tízes:

$\binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{36}{7}=1\,652\,840\,640$. (1 pont)

A két esetet összeadva: $363\,124\,080+1\,652\,840\,640=$ **2 015 964 720-féleképpen** lehetséges, hogy a 10 lap között pontosan 2 káró és egy tízes található. (1 pont)

c) A klasszikus valószínűség képlete alapján:

$$\frac{\binom{39}{10}}{\binom{52}{10}} = \mathbf{0,0402}$$ a valószínűsége annak, hogy nincs a leejtett lapok között kőr. (2 pont)

Összesen: 13 pont

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5.

a) **Az *S* halmaz a 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza. Hány elemű az *S* halmaz azon legnagyobb elemszámú részhalmaza, amely bármely két tagjának összege nem osztható 3-mal? (6 pont)**

b) **A 80 fős Matek Szekcióban minden tagnak megmérték a magasságát, egy tizedesjegy pontossággal feljegyezték, majd meghatároztak néhány statisztikai mutatót is. A Szekcióban nincs két azonos magasságú tag. Az eredmények alapján a magasságok átlaga 170,5 cm, szórása 10,68 cm, a medián pedig 168,1 cm. Később észrevették, hogy Kinga magassarkúban érkezett, Tami pedig direkt más számot diktált be, így Kinga magassága 170,7 cm helyett valójában 165,2 cm, míg Tami a bediktált 162 cm helyett 167,5 cm. Változott-e az átlag és a medián az értékek javítása után? Ha igen, milyen irányba? Válaszát mindkét esetben indokolja! (4 pont)**

c) **Hanna és Marci már nagyon belefáradtak a szürke hétköznapokba, emiatt új hobbi után néztek. Zsófi saját tapasztalata alapján a zabhegyezést ajánlotta nekik. Mivel kezdők még, ketten együtt 12 perc alatt tudnak egy véka zabot kihegyezni, ami Zsófinak egyedül is elegendő idő ugyanennyi zab kihegyezésére. Továbbá még azt tudjuk, hogy Marci egyedül 7 perccel lassabban tud egy véka zabot kihegyezni, mint Hanna. Mennyi idő alatt tud Marci egy vékányi zabot kihegyezni? (6 pont)**

Megoldás:

a) Egy szám hárommal osztva 0-t, 1-et, vagy 2-t adhat maradékul. (1 pont)

A 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számok közül, hárommal való osztás esetén:

675 db szám ad 0-t;

676 db szám ad 1-et;

és 675 db szám ad 2-t maradékul. (1 pont)

A 0 maradékos csoportból nem választhatnánk egynél többet, mert akkor biztosan lenne a részhalmazunkban olyan két szám, amelyek összege osztható hárommal. Egyszerre az 1 és 2 maradékos csoportból se választhatunk egyet-egyet a részhalmazunkba, ugyanebből az okból kifolyólag. (1 pont)

Az egyetlen jó megközelítés, ha csak egy halmazt választunk ki, az 1, vagy a 2 maradékosokat, mivel így biztosan nem lesz osztható semelyik két szám összege hárommal a részhalmazban. Ha az 1-es maradékos csoportot választjuk akkor járunk a legjobban, mivel ebben a legnagyobb az elemszám, továbbá ehhez még egy elemet hozzávehetünk a 0-s maradékos csoportból, ezáltal egyik számpáros se lesz osztható hárommal. (Több taggal már nem tudnánk bővíteni a részhalmazunkat a fentebb említettek miatt.) (2 pont)

Így **677 elemű** az *S* halmaz azon legnagyobb elemszámú részhalmaza, amely bármely két tagjának összege nem osztható hárommal. (1 pont)

b) Az átlag nem változott, mivel Kinga és Tami magasságváltozása kiegyenlíti egymást, ugyanis Kinga magassága 5,5 cm-rel csökkent, míg Tamié 5,5 cm-rel nőtt. (2 pont)

A medián csökkent. Míg Tami a medián alatt maradt a magasságának javításával is, addig Kinga magassága átkerült a medián alá. Így a 168,1 cm alattiak száma egyel nőtt, a 168,1 cm-nél magasabbak száma pedig egyel csökkent, ezzel a medián is alacsonyabb lett.

(2 pont)

c) Foglaljuk táblázatba a szövegből kiolvasható adatokat:

	A teljes munka elvégzése (perc)	1 perc alatti teljesítmény
Hanna	x	$\frac{1}{x}$
Marci	$x+7$	$\frac{1}{x+7}$
Együtt	12	$\frac{1}{12}$

(2 pont)

Ezek alapján: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{12}$. (1 pont)

Az egyenletet nullára rendezve, illetve közös nevezőre hozva:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{12}=0,$$

$$\frac{12x+84+12x-x^2-7x}{12x(x+7)}=0,$$

$-x^2+17x+84=0$. (1 pont)

Ezen másodfokú egyenlet két gyöke: $x_1=-4$; $x_2=21$, amelyekből a negatív előjelű jelen esetben nem értelmezhető, hiszen időtartamról van szó. (1 pont)

Tehát **Marci egyedül 28 perc alatt tud kihegyezni egy véka zabot**. (1 pont)

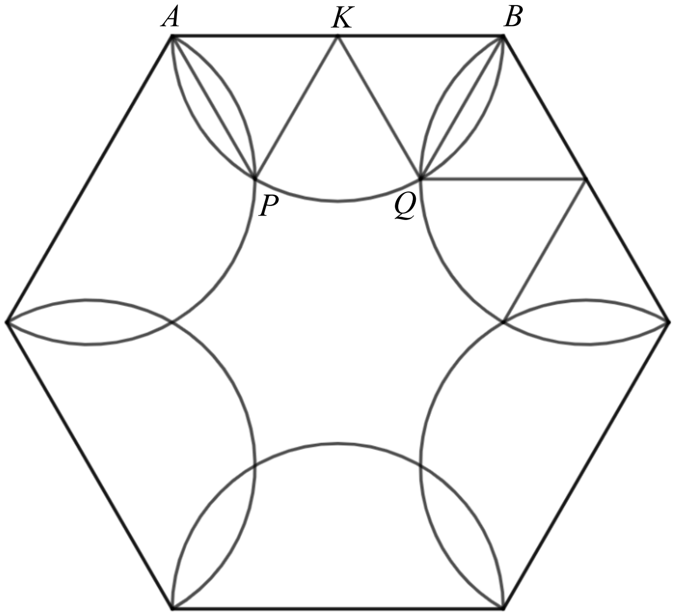
6. Anna a barátaival rendszeresen társasjátékozik, kedvencei a kockajátékok. Ráadásul egyre több barátját meggyőzte, hogy csatlakozzanak hozzá, emiatt már el sem férnek az otthoni asztalánál.

a) Azért, hogy a lehető legkényelmesebb környezetet teremtse meg a társasestekhez, beszerzett egy szabályos hatszög alakú asztalt, melynek oldala 80 cm hosszúságú. El szeretne helyezni egy dobókockát az asztalon úgy, hogy a kocka helyzetéből nézve az ahhoz legközelebb eső oldal tompaszög alatt látszódjon. Mekkora az a terület, amelyre ennek megfelelően elhelyezheti a kockát? (A dobókockát pontszerű testként kezeljük, azaz csak az elhelyezkedését vesszük figyelembe, a méretét nem.) (9 pont)

Tegnap este öten gyűltek össze játszani egy olyan játékkal, melyben mind az 5 játékosnak egyszerre kell dobnia egy-egy különböző színű szabályos dobókockával.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az első dobás után a dobott számok összege legfeljebb 20, ha tudjuk, hogy mind az 5 dobás páratlan? (7 pont)

Megoldás:



a) A Thalész-tétel tulajdonságait felhasználva felrajzolhatunk minden oldalra egy-egy félkört, melyeknek az oldalak az átmérőik. Így a körvonalakon helyezkednek el azok a pontok, melyekből a legközelebbi oldalak derékszög alatt látszódnak, a körökön belülről pedig tompaszög alatt fognak látszódni. (1 pont)

Az ábrán a megfelelő szakaszokat berajzolva a félkörlapok által lefedett területet háromszögekre és körcikkekre bonthatjuk. (1 pont)

A hatszög egy belső szöge: $\frac{(6-2)\cdot 180°}{6}=120°$. (1 pont)

Ebből tudjuk, hogy $PAK\measuredangle = KBQ\measuredangle = 60°$. (1 pont)

Mivel AK és PK szakaszok is a kör sugarával egyenlőek, PKA háromszög egyenlőszárú, vagyis alapon fekvő szögei megegyeznek, tehát $PAK\measuredangle = APK\measuredangle = 60°$. (1 pont)

Emiatt PKA háromszög szabályos, ugyanez felírható az összes hasonló háromszögről a hatszögön belül.

A PKQ körcikk középponti szöge is 60°, mert $AKP\measuredangle$ és $QKB\measuredangle$ -ekkel 180° az összegük.

(1 pont)

Így összesen 12 szabályos háromszög és 6 körcikk segítségével adható meg a félkörlapok által lefedett terület.

Egy szabályos háromszög területe: $T_{háromszög}=\frac{40^2\cdot\sqrt{3}}{4}\approx 692{,}82\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Egy körcikk területe: $T_{körcikk}=\frac{60°}{360°}\cdot 40^2\pi \approx 837{,}76\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Összesítve tehát $T = 12 \cdot 692,82 + 6 \cdot 837,76 \approx \mathbf{13340,39\ cm^2}$ **-es területen helyezheti el a dobókockát**. (1 pont)

b) A feladatot a komplementer események valószínűségének számolásával oldjuk meg.

A kedvező esetek ekkor, ha 21, 23 vagy 25 a dobások összege. (1 pont)

21 az összeg: 4 darab 5-ös és 1 darab 1-es $\Rightarrow$ 5-féle lehetőség; (1 pont)

3 darab 5-ös és 2 darab 3-as $\Rightarrow \binom{5}{2} = 10$-féle lehetőség. (1 pont)

23 az összeg: 4 darab 5-ös és 1 darab 3-as $\Rightarrow$ 5-féle lehetőség. (1 pont)

25 az összeg: 5 darab 5-ös $\Rightarrow$ egyféle lehetőség. (1 pont)

A kedvező esetek száma tehát 21 darab.

Az összes eset száma 3^5. (1 pont)

A keresett valószínűség tehát: $1 - \frac{21}{3^5} \approx \mathbf{0,91}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7. Barni rajong a sakkért, emiatt úgy döntött, hogy egy fenyőfából készült sakkbábuval fogja a szobáját dekorálni. A bábut három fa elemből szeretné összeragasztani úgy, hogy a legalsó elem egy csonkakúp, melyre pontosan illeszkedik egy másik, fejjel lefelé fordított csonkakúp, valamint tetején egy, a csonkakúpra pontosan illeszkedő félgömb található.

a) A csonkakúpok alapjainak sugarai páronként megegyeznek, továbbá a rövidebb sugár a hosszabb sugár felével egyenlő. A magasságuk azonban különbözik, a bábu alját alkotó csonkakúp magassága a fölötte levő magasságának duplája. Tudjuk ezen felül, hogy a bábu magassága pontosan négyszerese lesz a csonkakúpok nagyobbik sugarának. Milyen magas lesz az elkészült bábu, ha a térfogata 3890 cm^3? (8 pont)

Rékának is megtetszett a fenyőből készült dísztárgy ötlete, azonban ő a sakkot kevésbé szereti, inkább egy ékszertartót szeretne faragni magának. Az ékszertartóhoz egy szabályos háromszög alapú hasábra van szüksége.

b) Milyen magasságú testet faragjon, ha mindenképpen egy 100 cm^3 térfogatú, szabályos háromszög alapú hasábot szeretne, amelynek a felszíne a lehető legkisebb? (8 pont)

Megoldás:

a) A bábut helyesen ábrázolva, a kisebb csonkakúp magasságát m-mel, a nagyobb alap sugarát r-rel jelölve láthatjuk, hogy $3m+r=4r$, vagyis $m=r$. (2 pont)

A három alkotóelem térfogatai ez alapján:

$$V_{nagyobb\ kúp}=\frac{\pi\cdot 2r}{3}\cdot\left(r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2+r\cdot\frac{r}{2}\right),$$

egyszerűsítve: $V_{nagyobb\ kúp}=\frac{7\pi}{6}\cdot r^3$. (1 pont)

$$V_{kisebb\ kúp}=\frac{\pi\cdot r}{3}\cdot\left(r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2+r\cdot\frac{r}{2}\right),$$

egyszerűsítve: $V_{kisebb\ kúp}=\frac{7\pi}{12}\cdot r^3$. (1 pont)

$V_{félgömb}=\frac{4\pi}{3}\cdot r^3:2=\frac{4\pi}{6}\cdot r^3$ (1 pont)

Összesítve: $V=\frac{29\pi}{12}\cdot r^3=3890\ \text{cm}^3$, az egyenletet megoldva: $r\approx 8\ \text{cm}$. (2 pont)

Vagyis a test magassága $4r\approx$ **32 cm**. (1 pont)

b) A szabályos háromszög alapú hasáb térfogata: $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2\cdot m=100$. (1 pont)

Átalakítva: $m=\frac{100\cdot 4}{\sqrt{3}\cdot a^2}$. (1 pont)

A test felszíne: $A=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2+3\cdot a\cdot m$. (1 pont)

m helyére behelyettesítve és rendezve: $A = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot \frac{100 \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 + \frac{1200}{\sqrt{3} \cdot a}$.

(1 pont)

A felszín lehetséges szélsőértékeit az első derivált segítségével meghatározva:

$A' = \sqrt{3} \cdot a - \frac{1200}{\sqrt{3} \cdot a^2} = 0$, vagyis $a \approx 7,37$ cm. (2 pont)

A második deriváltba behelyettesítve: $A'' = \sqrt{3} + \frac{2400}{\sqrt{3} \cdot a^3} = \sqrt{3} + \frac{2400}{\sqrt{3} \cdot 7,37^3} \approx 5,2 > 0$,

vagyis minimumot találtunk. (1 pont)

Az $m = \frac{100 \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot a^2}$ egyenletet felhasználva megkapjuk, hogy $m \approx \mathbf{4,25}$ **cm** a minimális felszínű test magassága. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8. Lívi kedvenc elfoglaltsága az emlős, négylábú állatok megfigyelése.

a) Évek óta figyelemmel kíséri az örkényi szarvasállomány alakulását. 2018 januárjában 153 szarvas élt Örkényben, míg 2026-ban már 269 állatot számolt. Feltételezve, hogy minden évben ugyanakkora százalékkal nő a szarvasok száma, várhatóan hány év múlva haladja meg az 1000 egyedet? (5 pont)

A másik hobbija, hogy Galgamácsán pézsmatulkokat tenyészt. Egy új, kör alakú karámot szeretne építeni, mivel a korábbi másfél méter magas kerítésen áttörtek a nagyra nőtt állatai, ezzel komoly anyagi kárt okozva Lívi családjának.

b) Már le is ütött két oszlopot a kertjük végében található mezőn, melyeknek koordinátái $A(7;2)$ és $B(1;0)$. Az a terve, hogy ezek az oszlopok is részei lesznek az új karám kerítésének, valamint, hogy a sugara $\sqrt{20}$ m lesz. Írja fel a karámot meghatározó kör egyenletét! (6 pont)

Lívi három kedvenc pézsmatulkának életkora egy számtani sorozat első három tagja. Ha az első tagból kivonunk 3-at, a harmadikhoz hozzáadunk 23-at, a másodikat pedig változatlanul hagyjuk, egy mértani sorozatot kapunk, amely tagjainak összege 65.

c) Hány éves a legfiatalabb pézsmatulok? (5 pont)

Megoldás:

a) Először ki kell számolni, hogy a 2018-2026 között eltelt 8 évben hány százalékos volt az éves gyarapodás:

$153\cdot x^8=269$ (1 pont)

$$x^8=\frac{269}{153}$$

$x=\sqrt[8]{\frac{269}{153}}\approx 1,0730$ (1 pont)

Ennek a segítségével felírható egy egyenlőtlenség arra, hogy várhatóan hány év múlva haladja meg az 1000 egyedet a szarvasok száma:

$269\cdot 1,0730^n>1000$ (1 pont)

$$\lg 1,0730^n>\lg\frac{1000}{269}$$

$n>\dfrac{\lg\frac{1000}{269}}{\lg 1,0730}$ (1 pont)

$$n>18,64$$

19 év múlva fogja meghaladni a szarvasok száma az 1000 példányt. (1 pont)

b) Ha felírjuk az A és B középponttú, $\sqrt{20}$ sugarú körök egyenleteit, akkor ezek metszéspontjában lesznek a karámot meghatározó kör középpontjai:

$$\begin{cases}(x-7)^2+(y-2)^2=20\\(x-1)^2+y^2=20\end{cases}$$

(1 pont)

A két egyenletet egymásból kivonva, és x-re rendezve:

$$x = \frac{13}{3} - \frac{1}{3}y$$ (1 pont)

Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe:

$$\left(\frac{13}{3} - \frac{1}{3}y - 1\right)^2 + y^2 = 20$$ (1 pont)

A nullára rendezés után:

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$ (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $y_1 = -2$; $y_2 = 4$, ezeket visszahelyettesítve, a hozzájuk tartozó x-ek: $x_1 = 5$; $x_2 = 3$. (1 pont)

Így a karámot meghatározó kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20}$ vagy $\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 20}$. (1 pont)

c) Jelöljük a számtani sorozat első három tagját: $a-d$; a; $a+d$.

Ekkora a mértani sorozat első három tagja: $a-d-3$; a; $a+d+23$. (1 pont)

A feladat szövege szerint a mértani sorozat összege: $a-d-3+a+a+d+23=65$, amelyből $a=15$. (1 pont)

A mértani sorozatok tulajdonsága alapján: $15^2 = (12-d)(38+d)$. (1 pont)

Ebből a zárójelek felbontása, és nullára rendezés után $d^2 + 26d - 231 = 0$. (1 pont)

Az egyenlet két gyöke: $d_1 = -33$; $d_2 = 7$, az előbbivel negatív lenne a legfiatalabb pézsmatulok életkora, így az nem lehet megoldás.

Tehát a legfiatalabb pézsmatulok $15 - 7 = \mathbf{8}$ **éves**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9. Adott az alábbi három függvény:

$$f(x)=\frac{4}{x-5}$$

$$g(x)=10-x$$

$$h(x)=x^3-5x^2+2x+8$$

a) Számítsa ki az $f\cdot g\cdot(x-5)^2$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőértékhelyét/helyeit! (6 pont)

b) Számítsa ki az *f* és *g* függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét! (7 pont)

c) Határozza meg az $\frac{f}{g}\cdot h$ függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben vett határértékeit! (3 pont)

Megoldás:

a) Az így kapott függvény:

$$\frac{4}{x-5}\cdot(10-x)\cdot(x-5)^2=4(10-x)(x-5)=-4x^2+60x-200$$ (1 pont)

A függvény zérushelyének meghatározásához egyenlővé kell tenni nullával:

$$-4x^2+60x-200=0$$ (1 pont)

Amelyből a gyökök: $x_1=5;\ x_2=10$, tehát **a két zérushely: 5 és 10**. (1 pont)

A függvénynek a lokális szélsőértéke ott lehet, ahol az első deriváltja 0-át vesz fel:

$$\left(f\cdot g\cdot(x-5)^2\right)'(x)=-8x+60=0$$

$$x=7,5$$ (2 pont)

Az $\boldsymbol{x=7,5}$ helyen a függvény deriváltja előjelet vált, mivel az eredeti függvény másodfokú, így ez az egyetlen lokális szélsőérték hely. (1 pont)

Alternatív megoldás:

a) Az így kapott függvény:

$$\frac{4}{x-5}\cdot(10-x)\cdot(x-5)^2=4(10-x)(x-5)$$ (1 pont)

A függvény zérushelyének meghatározásához egyenlővé kell tenni nullával:

$$4(10-x)(x-5)=0.$$ (1 pont)

Tudjuk, hogy egy szorzat akkor, és csak is akkor egyenlő 0-val, ha valamely tényezője 0, tehát **a két zérushely: 5 és 10**. (1 pont)

A függvénynek a lokális szélsőértéke ott lehet, ahol az első deriváltja 0-át vesz fel:

$$\left(f\cdot g\cdot(x-5)^2\right)'(x)=-8x+60=0$$

$$x=7,5$$ (2 pont)

Az $\boldsymbol{x = 7,5}$ helyen a függvény deriváltja előjelet vált, mivel az eredeti függvény másodfokú, így ez az egyetlen lokális szélsőértékhely. (1 pont)

b) Két függvény által közbezárt terület meghatározásához, a függvények grafikonjainak metszéspontjai között kell integrálni, ahol $f = g$, azaz $\frac{4}{x-5} = 10 - x$. (1 pont)

Ez az egyenlet nullára rendezve: $x^2 - 15x + 54 = 0$, ahol a két gyök: $x_1 = 6;\ x_2 = 9$ (1 pont)

A két függvény közti terület a függvények különbségének határozott integráltjával számolható ki, mivel a két metszéspont között az egyenes a hiperbola fölött helyezkedik el, ezért az alábbi integrálást kell elvégezni:

$$\int_6^9 (10 - x) - \frac{4}{x-5}\,dx = \int_6^9 10 - x - \frac{4}{x-5}\,dx.$$ (1 pont)

A Newton-Leibniz-formulát felhasználva:

$$\left[10x - \frac{x^2}{2} - 4\ln\left(|x-5|\right)\right]_6^9$$ (2 pont)

Ebből behelyettesítve:

$$\left(10\cdot 9 - \frac{9^2}{2} - 4\ln\left(|9-5|\right)\right) - \left(10\cdot 6 - \frac{6^2}{2} - 4\ln\left(|6-5|\right)\right) = \frac{15}{2} - 8\ln(2) \approx 1,95$$ (1 pont)

Az f és g függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területe **1,95 területegység**. (1 pont)

c) A keresett függvény:

$$\frac{\frac{4}{x-5}}{10-x}\cdot\left(x^3 - 5x^2 + 2x + 8\right) = \frac{4x^3 - 20x^2 + 8x + 32}{-x^2 + 15x - 50}$$ (1 pont)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3 - 20x^2 + 8x + 32}{-x^2 + 15x - 50} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x - 20 + \frac{8}{x} + \frac{32}{x^2}}{-1 + \frac{15}{x} - \frac{50}{x^2}} = \frac{\infty + 20 + 0 + 0}{-1 + 0 + 0} = -\infty$$ (1 pont)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3 - 20x^2 + 8x + 32}{-x^2 + 15x - 50} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x - 20 + \frac{8}{x} + \frac{32}{x^2}}{-1 + \frac{15}{x} - \frac{50}{x^2}} = \frac{-\infty + 20 + 0 + 0}{-1 + 0 + 0} = \infty$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

A szerezhető maximális pontszám: 115 pont