PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2022. február 19.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI – ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2022. február 19.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

multijob DIÁKMUNKA

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS

– KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1) Egyszerűsítse az alábbi kifejezést, ahol $a \neq 4$!

$$\frac{a^2-8a+16}{a-4}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A számlálót szorzattá alakítjuk, így egyszerűsíteni tudunk.

$$\frac{(a-4)^2}{(a-4)}$$ (1 pont)

Az egyszerűsített eredmény: $\boldsymbol{a-4}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

2) Legyen az *A* halmaz a 10-nél kisebb pozitív összetett számok halmaza, a *B* halmaz pedig a 16-nál kisebb pozitív páros számok halmaza. Adja meg az $A \cap B$ és $B \setminus A$ halmazok elemeit! (3 pont)

Megoldás:

Az A és B halmaz elemei:

$A = \{4;\ 6;\ 8;\ 9\}$

$B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14\}$ (1 pont)

Az $A \cap B$ halmaz elemei:

$\boldsymbol{A \cap B = \{4;\ 6;\ 8\}}$ (1 pont)

Az $B \setminus A$ halmazok elemei:

$\boldsymbol{B \setminus A = \{2;\ 10;\ 12;\ 14\}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

3) Egy számtani sorozat harmadik eleme 5, ötödik eleme pedig 11. Adja meg a számtani sorozat első 10 tagjának összegét! (3 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat differenciája: **3** (1 pont)

Egy számtani sorozat bármelyik tagja felírható az első tag és a differencia segítségével az alábbi módon:

$a_n = a_1 + (n-1)d$, ekkor a képletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $\boldsymbol{a_1 = -1}$. (1 pont)

Egy számtani sorozat első *n* tagjának összegének kiszámolásához a következő összegképletet alkalmazható:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Az ismert paramétereket behelyettesítve:

$$S_{10} = \frac{2 \cdot (-1) + (10-1) \cdot 3}{2} \cdot 10$$

$$S_{10} = \frac{250}{2} = \mathbf{125}$$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

4) Adja meg az $f(x) = x^2 - 4x - 5$ függvény zérushelyeit! (2 pont)

Megoldás:

Ott lesz a függvénynek zérushelye, ahol a függvény nulla értéket vesz fel, ebből adódóan az alábbi egyenlet írható fel:

$0 = x^2 - 4x - 5$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva az alábbi gyököket kapjuk:

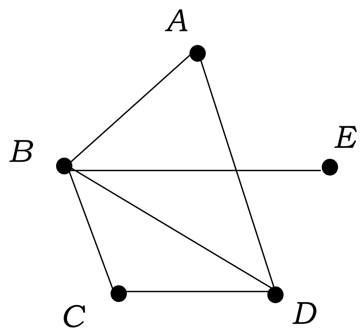
$\boldsymbol{x_1 = 5}$

$\boldsymbol{x_2 = -1}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Ábrázoljon egy öt pontú gráfot, amelyről tudjuk, hogy a csúcsok fokszámai: 1, 2, 2, 3, 4! (2 pont)

Lehetséges megoldás:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

6) Egy boltban egy nap eladták az almák 85%-át, így a nap végére 27 kg maradt. Hány kg alma volt a boltban nyitáskor? (2 pont)

Megoldás:

Az almák 15%-a maradt meg a nap végére, ez alapján a következő egyenlet írható fel:

$x \cdot 0{,}15 = 27$ (1 pont)

$x = 180$, tehát **180 kg** alma volt nyitáskor (1 pont)

Összesen: 2 pont

7) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Létezik olyan szám, amelynek a reciproka önmaga.

b) A négyszögek külső szögeinek összege $540°$.

c) A paralelogramma átlói mindig merőlegesen felezik egymást. (2 pont)

Megoldás:

(2 pont: mindhárom megoldás jó, 1 pont: két megoldás jó, 0 pont: egy vagy nulla megoldás jó)

A) Igaz, egyetlen ilyen szám van, az 1.

B) Hamis, mert egy sokszög külső szögeinek összege oldalszámtól függetlenül mindig $360°$.

C) Hamis, mert a paralelogramma átlói csak felezik egymást, míg a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. (2 pont)

Összesen: 2 pont

8) Egy osztályban a diákok matekdolgozatainak eredményei a következők: 7 db jeles, 4 db jó, 8 db közepes, 2 db elégséges és 1 db elégtelen. Adja meg a jegyek átlagát, móduszát és mediánját! Eredményét két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (3 pont)

Megoldás:

A jegyek **átlaga** az alábbi módon írható fel:

$$\frac{7\cdot5+4\cdot4+8\cdot3+2\cdot2+1\cdot1}{7+4+8+2+1}=\frac{80}{22}\approx\mathbf{3{,}64}$$ (1 pont)

A leggyakrabban előforduló elem, tehát a **módusz** ebben az esetben a **3.** (1 pont)

A **medián** úgy számolható ki, ha a dolgozatok eredményeit növekvő vagy csökkenő sorrendbe állítjuk, és megvizsgáljuk melyik a középső elem. Páros elemszám esetén a két középső elem számtani közepét kell venni, tehát:

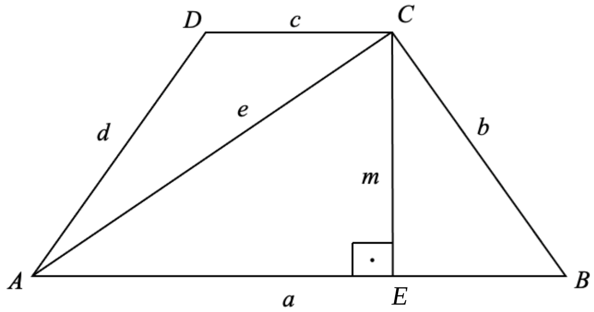
$$\frac{4+3}{2}=\mathbf{3{,}5}$$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

9) Egy húrtrapéz két alapja 5 cm és 13 cm, szárai pedig 6 cm hosszúak. Adja meg a trapéz átlójának hosszát centiméterben két tizedesjegy pontossággal! (3 pont)

Megoldás:

Ahhoz, hogy a húrtrapéz átlóját ki tudjuk számolni, először az alaphoz tartozó magasságot kell meghatároznunk. Az ábrán látható $EBC\triangle$-ben lévő EB szakasz hosszát úgy kaphatjuk meg, ha a hosszabbik alapból kivonjuk a kisebbiket, majd az így kapott eredményt elosztjuk kettővel.



$$\overline{EB}=\frac{13-5}{2}=4\text{ cm}$$ (1 pont)

Ezután a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámolható a magasság:

$$m^2+4^2=6^2$$

$$m=\sqrt{20}\text{ cm}$$ (1 pont)

Mivel tudjuk, hogy az EB szakasz 4 cm, ezért az AE szakasz 9 cm. Az $AEC\triangle$-ről szintén tudjuk, hogy derékszögű, így erre is felírhatunk egy egyenletet a Pitagorasz-tétel segítségével.

$$9^2+20=e^2$$

$$\boldsymbol{e=\sqrt{101}\approx10{,}05\text{ cm}}$$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

10) Adja meg a $(9;-12)$ ponton átmenő, $\underline{v}(5;-7)$ irányvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

Az irányvektoros egyenletet felhasználva felírható az egyenes egyenlete: (1 pont)

$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_2y_0$

$-7x - 5y = -7\cdot 9 - 5\cdot(-12) \Rightarrow \mathbf{7x + 5y = 3}$ (1 pont)

Alternatív megoldás:

A feladatból meghatározható a normálvektor, amely $\underline{n}(7;\, 5)$. (1 pont)

Ezután a normálvektoros egyenletet felhasználva felírható az egyenes egyenlete:

$Ax + By = Ax_0 + By_0$

$7x + 5y = 7\cdot 9 + 5\cdot(-12) \Rightarrow \mathbf{7x + 5y = 3}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

11) Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredeti szám kétszeresénél 10-zel kisebb számot kapunk. Az eredeti és az újonnan kapott szám összege 88. Mi volt az eredeti szám? (3 pont)

Megoldás:

A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhajuk fel:

$2\overline{xy} - 10 = \overline{yx} \Rightarrow 2(10x + y) - 10 = 10y + x$

$19x - 10 = 8y$ (1 pont)

Továbbá tudjuk, hogy az eredeti és az új szám összege 88.

$\overline{xy} + \overline{yx} = 88 \Rightarrow 10x + y + 10y + x = 88$

$11x + 11y = 88$

$x + y = 8$

A két egyenletet használva a következő egyenletrendszer írható fel:

$\left.\begin{aligned} 19x - 10 &= 8y \\ x + y &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 8 - y$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezhető az *x*, majd az így kapott eredményt behelyettesítjük az első egyenletbe:

$19(8 - y) - 10 = 8y$

$27y = 142$

$\boldsymbol{y = \frac{142}{27} \Rightarrow x = \frac{74}{27}}$

A feladat szövege alapján *x* és *y* pozitív, egyjegyű természetes számok, ezért a feladatnak **nincs megoldása**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

12) Egy 52 lapos francia kártyából véletlenszerűen húzunk egy lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy olyan pikk vagy treff lapot húzunk, melynek értéke prímszám?
(3 pont)

Megoldás:

Összesen 8 db kártyalap felel meg a feladat kritériumának, melyek a 2, 3, 5 és 7 értékű lapok kétféle színben. Ez a kedvező esetek száma. (1 pont)

Az összes eset száma 52. (1 pont)

$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset}} = \mathbf{\frac{8}{52} \approx 0{,}1538}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13) Oldja meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$ **(6 pont)**

b) $\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} < 1$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenletben szinusz és koszinusz is van, ezért felhasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, átírjuk a $\cos^2 x$-et. (1 pont)

$2\left(1-\sin^2 x\right) - 3\sin x = 0$

A zárójelet felbontjuk és rendezzük az egyenletet:

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ (1 pont)

Az alábbi egy másodfokúra visszavezethető egyenlet, ezért új ismeretlen ($\sin x = a$) bevezetése után:

$2a^2 + 3a - 2 = 0$ (1 pont)

Megoldva az egyenletet *a*-ra, a következő gyököket kapjuk:

$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = -2$

Ezeket visszahelyettesítjük a $\sin x = a$ egyenletbe:

I. eset: $\sin x = \frac{1}{2}$, amiből: $\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}}$ és $\boldsymbol{x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi;\ l \in \mathbb{Z}}$ (1 pont)

II. eset: $\sin x = -2$, ami alapján az egyenletnek nincsen több megoldása, mivel $-1 \le \sin x \le 1$

(1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) Kikötést teszünk a hatványkitevő nevezőjére: $x \ne 2$ (1 pont)
Az egyenlőtlenség mindkét oldalát azonos alapú kifejezésekké alakítjuk át

$\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} < \left(\frac{1}{15}\right)^0$ (1 pont)

Mivel az alapok egyenlők, és egynél kisebbek, ezért az exponenciális függvény szigorúan csökkenő monotonitása miatt az alapokat elhagyhatjuk, és a relációsjel megfordul.

$\frac{x+2}{x-2} > 0$ (1 pont)

Mivel a nevezőben is van ismeretlen, ezért előjelvizsgálatot teszünk, ami két esetre bontja a megoldási menetet: (1 pont)

I. eset: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases}$

II. eset: $\begin{cases} x+2<0 \\ x-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x<2 \end{cases}$

Meghatározzuk a metszeteket:

$x < -2$ és $x > 2$ (1 pont)

Majd meghatározzuk az uniót:

$x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]2;\infty\right[$ (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Összesen: 13 pont

14)

a) Egy szabályos *n* oldalú sokszög egy belső szöge $120°$. Hány oldalú a sokszög és hány átlója van? (6 pont)

b) Egy szabályos nyolcszög köré írható körének sugara 10 cm. Adja meg a sokszög beírt körének sugarát két tizedesjegy pontossággal! (5 pont)

Megoldás:

a) Egy *n* oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$ (1 pont)

(Ez a pont akkor is jár, ha ez csak az egyenletből derül ki)

Így felírhatjuk a következő egyenletet: $(n-2)\cdot 180° = n\cdot 120°$ (1 pont)

$n\cdot 180° - 360° = n\cdot 120°$

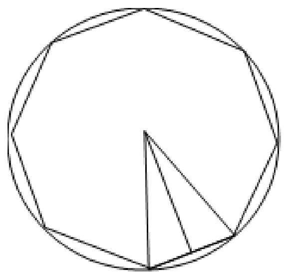
$n\cdot 60° = 360°$ (1 pont)

Az egyenletet megoldva megkapjuk, hogy $\boldsymbol{n=6}$. (1 pont)

Egy sokszög átlóinak száma: $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (1 pont)

Így megkapjuk, hogy az átlók száma **9**. (1 pont)

b) Egy szabályos nyolcszög nyolc egybevágó háromszögre bontható a középpontjából. Egy ilyen kis háromszög magassága lesz a beírható kör sugara. (1 pont)



Az egyenlő szárú háromszög szárai 10-10 cm hosszúak. Ezáltal a szárak által bezárt szög az alábbi módon írható fel:

$\dfrac{360°}{8} = 45°$. (1 pont)

A magasság ezt a szöget felezi, ami $22,5°$ lesz. (1 pont)

Így felírhatunk egy koszinusz szögfüggvényt: $\cos 22,5° = \dfrac{r}{10}$ (1 pont)

Ebből megkapjuk, hogy a beírható kör sugara **9,24 cm**. (1 pont)

Összesen: 11 pont

15. Anna és Bori minden nap elmennek a közeli kávézóba, ahol az első nap 2 csésze caramel macchiatót isznak ketten együtt. Mivel a kávé nagyon zamatos, a hely pedig otthonos, ezért minden nap egyre több időt töltenek ott, így több kávét fogyasztanak. A fogyasztott kávék egy számtani sorozatot alkotnak. Az ötödik napon ketten együtt 400 mg koffeint visznek be a szervezetükbe.

a) Hány csésze caramel macchiatóval fogyasztottak többet nap mint nap ketten együtt, ha egy csésze caramel macchiato koffeintartalma 40 mg.? (4 pont)

b) A kávézóban ötféle kávé közül lehet választani. Egyik nap zárásnál felírták, hogy melyik fajtából mennyi fogyott. Ábrázolja kördiagramon az egyes kávéfajták megoszlását!

	Espresso	Caramel Macchiato	Latte	Flat White	Cappuccino
db	**120**	**56**	**94**	**20**	**70**

(3 pont)

Anna egyik nap három dolgozatot is ír, ezért Bori úgy döntött, hogy meglepi őt két csésze kávéval, hogy jól teljesítsen. Anna kedvence a Latte, de Bori ezt nem tudja.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a Bori által vett két különböző kávé közül az egyik Anna kedvence lesz, ha tudjuk, hogy összesen öt különböző kávéfajta van? (5 pont)

Megoldás:

a) A feladat szövegéből kiderül, hogy egy számtani sorozatról van szó, és a differenciát kell meghatároznunk, hogy megtudjuk a lányok mennyivel fogyasztanak több kávét napról napra.

Ha első nap két csészét isznak összesen, akkor az 80 mg koffeint jelent, tehát $a_1 = 80$. (1 pont)

A feladat szövegéből megtudjuk, hogy az $a_5 = 400$. (1 pont)

A differenciát meg tudjuk határozni a következő egyenlet felírásával: $a_5 = a_1 + 4d$,

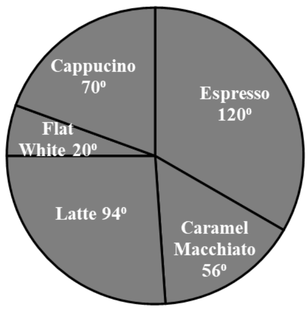
innen $400 = 80 + 4d$. (1 pont)

A differencia tehát 80, ami két kávé koffeintartalma, így **2 csészével** fogyasztanak minden nap többet. (1 pont)

b) Először meg kell határoznunk, hogy egy fok a kördiagrammon hány kávét fog jelenteni. Összesen 360 csésze kávé fogyott. Ha ezt a számot elosztjuk 360-nal, akkor megkapjuk, hogy az egyes kávékhoz tartozó középponti szögek nagyságai megegyeznek a kávék számával, tehát a kördiagramon egy csésze kávé $1°$-ot jelent a megfelelő körcikken. (1 pont)

Ez alapján felrajzolható a kördiagramm, ahol az alábbi cikkek szögei:

Espresso: **120°**
Caramel Macchiato: **56°**
Latte: **94°**
Flat White: **20°**
Cappucino: **70°** (2 pont)



c) Bori összesen 5 féle kávé közül választhat.

Az összes eset száma az, ha kiszámoljuk, hogy összesen hányféleképpen választhatja ki a két féle kávét: $\binom{5}{2} = 10$ (2 pont)

A kedvező esetek száma $\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1} = 4$, mivel kedvező eset akkor adódik, ha az egyik kávé Latte, a másik pedig bármelyik a másik 4 közül. (2 pont)

Így a keresett valószínűség: $\mathbf{\frac{4}{10} = 0,4}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16. Három barát három különböző városban él. Egyik nap megbeszélték, hogy találkoznak, és olyan várost választanak ehhez, amely mindhármuktól egyenlő távolságra van. Ezt egy koordináta-rendszerben ábrázolják, ahol az adott városok koordinátái a következők: $A(5;-1)$, $B(2;2)$, $C\left(\frac{37}{5};\frac{19}{5}\right)$.

a) Adja meg annak a D városnak a koordinátáit, amely mindhármuktól egyenlő távolságra van! (8 pont)

Az A várostól nem messze halad egy autópálya, amely egyenesének egyenlete: $e:-\frac{1}{2}x+y=-6$.

b) Milyen messze van légvonalban az autópálya a várostól? Mekkora utat kell megtenni, ha tudjuk, hogy az út hossza háromszor annyi, mint légvonalban? (6 pont)

A három barát elhatározza, hogy mindenki elhozza egyik testvérét a következő programjukra.

c) Hányféleképpen tudnak leülni hatan egy kör alakú asztalhoz? (3 pont)

Megoldás:

a) A feladatban egy olyan körnek a középpontját kell megadni, amire illeszkedik a három másik pont, mert ez a középpont az, ami egyenlő távolságra lesz a három másik ponttól.

Ehhez képezzük az $\overrightarrow{AB}$ vektort, ami az AB egyenes felezőmerőlegesének normálvektora lesz: $\overrightarrow{AB}(-3;3)$ (1 pont)

Ahhoz, hogy az egyenest felírjuk, szükségünk lesz egy pontra, amin az egyenes átmegy, ez az AB felezőpontja lesz: $F_{AB}\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)=\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

Mostmár fel tudjuk írni az AB felező merőleges egyenesét: $e_{AB}:-3x+3y=-9$ (1 pont)

Ahhoz, hogy megkapjuk a kör középpontját, képezzük az AC felezőmerőleges egyenesét, majd a két egyenes metszéspontja fogja meghatározni a középpontot.

Tehát képezzük az $\overrightarrow{AC}$ vektort, ami az AC felező merőlegesnek a normálvektora lesz: $\overrightarrow{AC}\left(\frac{12}{5};\frac{24}{5}\right)$ (1 pont)

Képezzük az AC felezőpontját: $F_{AC}\left(\frac{a_1+c_1}{2};\frac{a_2+c_2}{2}\right)=\left(\frac{31}{5};\frac{7}{5}\right)$ (1 pont)

Így fel tudjuk írni az AC egyenes egyenletét: $f_{AC}:12x+24y=108$

A két felező merőleges metszéspontja megadja a kör középpont koordinátáit:

$$\left.\begin{array}{l}-3x+3y=-9\\12x+24y=108\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x=5\\y=2\end{array}$$ (2 pont)

Tehát a keresett pont: $\boldsymbol{D(5;2)}$. (1 pont)

b) Az e egyenes egyenletéből leolvasható az egyenes normálvektora, ami $\underline{n}\left(-\frac{1}{2};1\right)$, ebből következik, hogy az e egyenes irányvekora $\underline{v}\left(1;\frac{1}{2}\right)$ megegyezik a rá merőleges egyenes normálvektorával. Ez a merőleges egyenes áthalad az A ponton, ebből adódóan a következő egyenletet lehet felírni:

$$f: x+\frac{1}{2}y=1\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot(-1)=4,5$$ (1 pont)

Az f és az e egyenes metszéspontja segítségével meg tudjuk adni a város és az autópálya távolságát. A metszéspont az alábbi egyenletrendszer megoldásával kapható meg:

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{1}{2}y=4,5 \\ -\frac{1}{2}x+y=-6 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezhető az y, majd ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe az alábbiakat lehet felírni:

$$x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-6\right)=4,5$$

$$\frac{5}{4}x=7,5$$

$$x=6$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot 6-6=-3$$

Tehát az e és az f egyenes metszéspontja $E(6;-3)$. (2 pont)

Az A és E pont távolsága az alábbi módon számolható ki:

$$\left|\sqrt{(6-5)^2+(-3-(-1))^2}\right|=\sqrt{5}\approx 2,24$$ (1 pont)

Az út a várostól 2,24 egységnyire van légvonalban, viszont a megtett út háromszor annyi, mint a légvonalban mért távolság, ezért ezt meg kell szorozni hárommal:

$$\sqrt{5}\cdot 3=6,71$$

Tehát **6,71** egységnyi utat kell megtenni. (1 pont)

<u>Alternatív megoldás</u>:

A pont és egyenes távolsága képletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$d=\frac{|Ax_1+Bx_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5+1\cdot(-1)+6\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\sqrt{5}\approx 2,24$$ (3 pont)

Így megkaptuk, hogy légvonalban 2,24 egységnyi távolságra van az út a várostól. (1 pont)

Ahhoz, hogy megkapjuk, hogy mennyi utat kell megtenni, a kapott eredményt hárommal szoroznunk kell: $\sqrt{5}\cdot 3\approx 6,71$ (1 pont)

Tehát **6,71 egységnyi** utat kell megtennünk. (1 pont)

c) Összesen hatan vannak, tehát hat embert 6!-féleképpen lehet sorbarendezni. (1 pont)

Azonban az nem számít különböző esetnek, ha ugyanabban a sorrendben ülnek, csak más székeken, ezért még el kell osztanunk a helyek számával (vagy a feladat megoldható a ciklikus permutáció képletével is, ahol n darab különböző elem permutációnak a száma $(n-1)!$).(1 pont)

Tehát $\mathbf{\frac{6!}{6}=120}$ **-féleképpen** tudnak leülni. (1 pont)

Összesen: 17 pont

17. A svéd űrkutatók egy kísérlet céljából egy forradalmian új űrszondát terveznek, amelyet a Föld holdja körüli pályára lőnek fel. Az űrszonda méreteiről a következőket tudjuk: az alja egy 3 méter magas henger, amely alapkörének sugara 1 méter; erre illeszkedik egy fordított csonkakúp, amin egy 1,4 méter magas kúp fekszik, alapkörének sugara pedig 1,2 méter. Az űrszonda teljes magassága 5 méter.

a) Számítsa ki az űrszonda térfogatát két tizedesjegyre kerekítve! (6 pont)

A kilövés következtében az űrszonda számos fizikai erő- és hőhatásnak van kitéve, ezért speciális anyagokkal kell bevonni. A legfontosabb bevonat a hőálló festék, amellyel a test alsó részét, a hengert kell lefesteni. Tudjuk, hogy egy liter festékkel 0,5 négyzetméternyi területet lehet lefesteni.

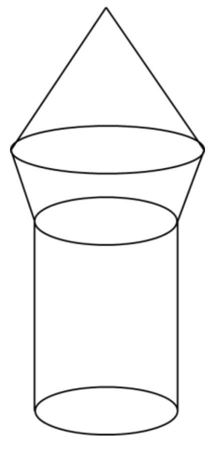
b) Hány liter festékre lesz szükség, ha 10%-ot rászámolunk, hogy biztosan elég legyen? (7 pont)

A kilövés folyamatában fokozottan nő a nyomás a szonda belsejében. A nyomás változásának követésére a következő függvény írható fel: $p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{L \cdot h}{T_0}\right)^2$, ahol p_0 a tengerszinten lévő légköri nyomás, L az átlagos légköri kőmérséklet csökkenés, h a pillanatnyi magasság és T_0 a tengerszinti átlagos hőmérséklet. Ezen állandók nagyságai a következők: $L = 0,006$ K/m és $T_0 = 288,15$ K.

c) Mekkora a tengerszinti légköri nyomás, ha a szondában 1200 méter magasan 96324,65 Pa a nyomás? (4 pont)

Megoldás:

a) A test az alábbi módon ábrázolható: (1 pont)



A három testnek külön kiszámoljuk a térfogatát, majd ezeket összeadjuk.

A henger térfogata: $V_1 = r^2\pi \cdot M_{henger} = 1^2\pi \cdot 3 \approx 9,42\ \text{m}^3$ (1 pont)

A kúp térfogata: $V_2 = \frac{M_{kúp}}{3} \cdot R^2\pi = \frac{1,4}{3} \cdot 1,2^2\pi \approx 2,11\,\text{m}^3$ (1 pont)

A csonkakúp magassága: $5 - 3 - 1,4 \approx 0,6\,\text{m}$ (1 pont)

$V_3 = M_{csonkakúp} \cdot \frac{\pi}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) = 0,6 \cdot \frac{\pi}{3}\left(1,2^2 + 1^2 + 1,2 \cdot 1\right) \approx 2,29\ \text{m}^3$

(1 pont)

A teljes űrszonda térfogatát úgy kapjuk meg, ha ezeket összeadjuk.

$V = V_1 + V_2 + V_3 = 9,42 + 2,11 + 2,29 = \mathbf{13,82\,m^3}$

Az űrszonda térfogata $\mathbf{13,82\ m^3}$. (1 pont)

b) A hengernek csak a palástját és az alsó alapkörét festjük le, tehát a palást és egy alapkör területét kell kiszámolnunk. (1 pont)

$T_{palást} = 2r\pi \cdot 3 = 2\pi \cdot 3 = 18,85\,\text{m}^2$ (1 pont)

$T_{alapkör} = r^2\pi = \pi = 3,14\,\text{m}^2$ (1 pont)

A lefestendő felszín tehát: $18,85 + 3,14 = 21,99\,\text{m}^2$ (1 pont)

A feladat szerint 1 liter festék 0,5 négyzetméterre elég, ezért $21,99 : 0,5 = 43,98$ liter festék kell a hengerre. (1 pont)

Mivel a szöveg alapján erre 10%-ot még rá kell számolnunk, ezért:

$43,98 \cdot 1,1 = 48,38$, tehát (1 pont)

48,38 liter festékre van szükség. (1 pont)

c) A légnyomás kiszámolásához be kell helyettesítenünk a képletbe:

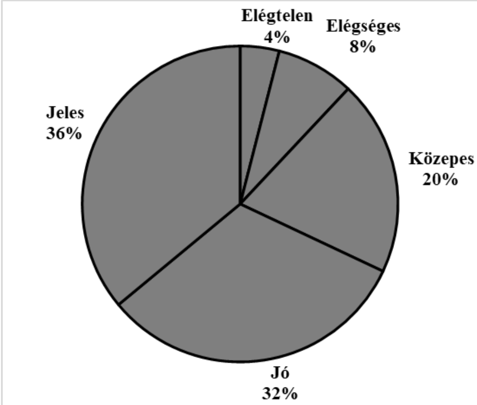
$$96324,65 = p_0 \cdot \left(1 - \frac{0,006 \cdot 1200}{288,15}\right)^2$$ (1 pont)

Az egyenletet átrendezve a megoldandó egyenlet: $p_0 = \dfrac{96324,65}{\left(1 - \dfrac{0,006 \cdot 1200}{288,15}\right)^2} \approx 101325\,\text{Pa}$ (1 pont)

Így a nyomás tengerszinten **101 325 Pa.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

18. Egy 50 fős osztályban egy nap matematika dolgozatot írtak a diákok. Egy héttel később a tanár ötösével osztja ki a dolgozatokat. Az alábbi ábrán látható az eredmények megoszlása:



a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első öt dolgozat között, amit kiválaszt, legalább kettő jeles lesz? (6 pont)

Mivel a tanárnő szeretné, hogy minden diák kellően tudja az anyagot, ezért a hét minden tanítási napján egy diák felel. A dolgozat kiosztása utáni héttől kezdve hétfőtől péntekig véletlenszerűen választ egy diákot az osztályból. Az is előfordulhat, hogy van olyan diák, aki egy héten többször is sorra kerül.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a héten kiválasztott diákok között pontosan három olyan lesz, akinek közepesnél jobb lett a dolgozata? (4 pont)

Minden évben megrendezésre kerül az iskolák közötti Kerületi Futball Bajnokság. A bajnokságon körmérkőzéses rendszert alkalmaznak, ami azt jelenti, hogy a résztvevők mindegyike ugyanannyiszor mérkőzik meg az összes többi résztvevővel. A versenyen 8 csapat vesz részt, és eddig összesen 10 meccs zajlott le.

c) Hány meccs van még hátra a bajnokság végéig? (2 pont)

Ebben az 50 fős osztályban a diákok 3 fakultáció (matematika, történelem és angol) közül választhatnak. Angolra összesen 26-an járnak, történelemre pedig 27-en. Azok a diákok, akik angol és matek fakultációra is járnak 9-en vannak, ez 5-tel kevesebb, mint azoknak a száma, akik angolra és történelemre járnak. Csak angolra ugyanannyian járnak, mint azok a tanulók, akik csak történelemre. 2 tanulót mind a három tárgy érdekli, ezért ők történelem, matematika és angol fakultációra is járnak, míg 4 tanuló egyikre sem.

d) Hány tanuló jár csak matematika és történelem fakultációra? (5 pont)

Megoldás:

a) Az ábra segítségével meghatározhatjuk, hogy melyik osztályzatból hány darab keletkezett.

Jeles: $50 \cdot 0,36 = 18$

Jó: $50 \cdot 0,32 = 16$

Közepes: $50 \cdot 0,2 = 10$

Elégséges: $50 \cdot 0,08 = 4$

Elégtelen: $50 \cdot 0,04 = 2$ (1 pont)

Azt, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább két jeles dolgozat lesz a kihúzottak között, úgy lehet megállapítani, ha megvizsgáljuk a keresett valószínűségnek a komplementerét, tehát megnézzük, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyetlen jeles sincs a dolgozatok között, vagy csak egy darab van belőle. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy nincs a dolgozatok között jeles:

$$\frac{\binom{18}{0}\binom{32}{5}}{\binom{50}{5}} \approx 0,0950$$

(1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy jeles van a dolgozatok között:

$$\frac{\binom{18}{1}\binom{32}{4}}{\binom{50}{5}} \approx 0,3055$$

(1 pont)

A két valószínűség összege:

$$P(\overline{A}) = 0,0950 + 0,3055 = 0,4005$$

A keresett valószínűség:

$P(A) = 1 - 0,4005 = \mathbf{0,5995}$ (1 pont)

Tehát **0,5995 a valószínűsége**, hogy legalább kettő jeles lesz a dolgozatok között (1 pont)

b) Először kiszámoljuk annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott diák dolgozata jó vagy jeles, majd annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott diák dolgozata elégtelen, elégséges vagy közepes.

Annak a valószínűsége, hogy jó vagy jeles a dolgozat: $\frac{34}{50} = 0,68$ (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy elégtelen, elégséges vagy közepes a dolgozat: $\frac{16}{50} = 0,32$ (1 pont)

Binomiális eloszlást használva a keresett valószínűség:

$P = \binom{5}{3}(0,68)^3(0,32)^2 = 0,3220$ (1 pont)

Tehát **0,322 a valószínűsége**, hogy pontosan 3 diáknak lesz közepesnél jobb dolgozata.

(1 pont)

c) Első lépésként kiszámoljuk, hogy összesen hány mérkőzést játszanak le.

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (1 pont)

A feladat szövege szerint 10-et már lejátszottak:

$28 - 10 = 18$

Így **18** meccs van még hátra. (1 pont)

d) A megadott adatokból a következőket írhatjuk fel:

$A =$ angol fakultációra járó diákok
$B =$ történelem fakultációra járó diákok
$C =$ matematika fakultációra járó diákok

$|A| = 26$

$|B| = 27$

$|A \cap B \cap C| = 2$ (1 pont)

Ebből felírható a matematikára és angolra, viszont történelemre nem járó diákok számát:

$|A \cap C \setminus B| = 9 - 2 = 7$ (1 pont)

Azok a diákok, akik történelemre és angolra, viszont matematikára nem járnak öttel többen vannak, tehát:

$\left|A \cap B \setminus C\right| = 9 + 5 - 2 = 12$ (1 pont)

Azok a tanulók, akik csak történelemre járnak ugyanannyian vannak, mint azok, akik csak matematikára, ezek alapján a következő írható fel:

$\left|A \setminus B \setminus C\right| = 26 - 2 - 12 - 7 = 5$, és ez egyben a csak történelmet tanulóknak száma is. (1 pont)

Ebből pedig ki tudjuk számolni azoknak a számát is, akik matematikát és történelmet, viszont angolt nem tanulnak:

$\left|B \cap C \setminus A\right| = 27 - 5 - 12 - 2 = \mathbf{8}$

Összesen **8 diák** jár matematika és történelem fakultációra, viszont angolra nem. (1 pont)

Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34 pont