PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2022. február 19.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI – ÉRTÉKELÉSIÚTMUTATÓ

2022. február 19.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

1. Timi gondolt egy ötjegyű számra, azonban ennek két számjegyét eltakarta Máté elől: $\overline{7a85b}$.

a) Segítsen Máténak, és adja meg az összes olyan *ab* számpárt, melyre teljesül az, hogy az ötjegyű szám osztható lesz 12-vel! (4 pont)

Adott a 10-es számrendszerbeli 427_{10}.

b) Írja át ezt a számot 3-as számrendszerbe! (2 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám! (5 pont)

Adott az alábbi állítás: *„Minden szám osztható 24-gyel, ha osztható 4-gyel és 6-tal."*

d) Fogalmazza meg az állítás tagadását, valamint adja meg annak logikai értékét. Amennyiben az állítás tagadása hamis, tegye igazzá! (3 pont)

***Megoldás*:**

a) Tudjuk, hogy egy szám akkor osztható 12-vel, ha 3-mal és 4-gyel is. (1 pont)

Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegye is osztható 4-gyel, tehát a *b* értéke csak 2 vagy 6 lehet. (1 pont)

Hárommal akkor osztható egy szám, ha a számjegyeinek összege is osztható 3-mal, tehát a *b* értékétől függően, ha $b=2$, akkor *a* értéke lehet 2, 5, vagy 8, ha pedig $b=6$, akkor pedig *a* értéke lehet 1, 4 vagy 7. (1 pont)

Tehát a lehetséges *ab* számpárjaink a: **2 és 2; 2 és5; 2 és 8; 6 és 1; 6 és 4; 6 és7.** (1 pont)

b) $427:3=142$, maradék $=1$

$142:3=47$, maradék $=1$

$47:3=15$, maradék $=2$

$15:3=5$, maradék $=0$

$5:3=1$, maradék $=2$

$1:3=0$, maradék $=1$ (1 pont)

Tehát $\mathbf{427_{10}=120211_3}$. (1 pont)

c) A feladat megoldásához indirekt bizonyítást fogunk használni. Tegyük fel, hogy $\sqrt{5}$ egy racionális szám, tehát felírhatjuk azt, hogy $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, ahol *a* és *b* egész számok, és $b\neq 0$. Ezentúl fontos, hogy *a* és *b* egymáshoz képest relatív prímek. (1 pont)

A $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ egyenletet négyzetre emelve megkapjuk az $5=\frac{a^2}{b^2}$ egyenletet, amit b^2-tel beszorozva az alábbi egyenletet kapjuk: $5b^2=a^2$ (1 pont)

Ebből az összefüggésből azt kapjuk, hogy a^2 osztható 5-tel. Tehát, ha a^2 osztható 5-tel, akkor *a* is osztható 5-tel, vagyis felírható az, hogy $a=5c$, ezáltal $a^2=25c^2$. (2 pont)

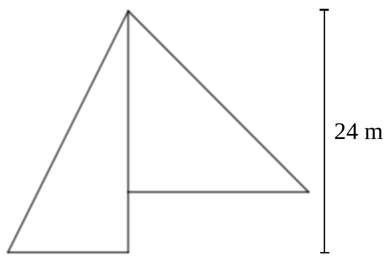
Ebből az következik, hogy akkor $5b^2=25c^2$, vagyis $b^2=5c^2$, tehát *b* is osztható 5-tel, ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel *a* és *b* nem lehetnek relatív prímek, ezáltal bebizonyítottuk, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám. (1 pont)

d) Tagadás: *"Van olyan szám, ami nem osztható 24-gyel, ha osztható 4-gyel és 6-tal."* (1 pont)

Az állítás **igaz**, mivel ilyen szám például a 12 vagy a 60, amikre teljesül az állítás. (2 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy vitorláshajónak két különböző derékszögű háromszög alakú vitorlája van, melyek területe megegyezik. Az árbóc hossza 24 m, valamint azt is tudjuk, hogy a két vitorla magasságának aránya 5:6.



a) Mekkorák a két háromszög területe, és mekkorák az oldalai, ha tudjuk, hogy az egyik vitorla átfogója 25 m? (6 pont)

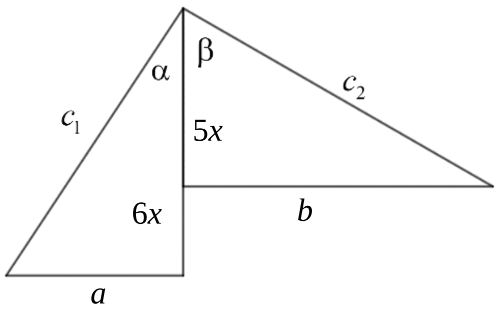
Kiválasztunk a Balaton partján 4 várost: Balatonboglárt, Balatonszepezdet, Balatonakalit és Balatonszemest, melyek egy rombuszt alkotnak.

b) Hány km-t tesz meg a hajó, ha egy körutat szeretne tenni a 4 várost meglátogatva, ha tudjuk, hogy Balatonboglár és Balatonakali távolsága 16 km, valamint Balatonszepezd és Balatonszemes távolsága 12 km? (3 pont)

c) Egy másik hajóút hossza 56 km. Az összes út hány százalékát teszi meg a hajó 1,25 óra alatt, ha sebessége állandó, 28 km/h? (3 pont)

Megoldás:

a) Mivel tudjuk, hogy két átfogó is lehet 25 méter, ezért két részre bontjuk a feladatot, amikor a c_1, és amikor c_2 a 25 méter. Ezentúl tudjuk, hogy az 5:6 arány miatt a hosszabbik befogó (az árbóc) 24 méter, amíg a rövidebb 20 méter. (1 pont)



Az első esetben, ahol $c_1 = 25$ felírhatjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, amiből $\alpha = 16,26°$.

Innen kiszámolhatjuk a területét ennek a háromszögnek, ami $T = \frac{24 \cdot 25 \cdot \sin 16,26°}{2} = 84\ \text{m}^2$.

(1 pont)

A $84 = \frac{24a}{2}$ és a $84 = \frac{20b}{2}$ egyenletekből megkapjuk azt, hogy $a = 7$ és $b = 8,4$.

Ezután a c_2 oldalt meghatározzuk a Pitagorasz-tétellel, ami $c_2 = \sqrt{20^2 + 8,4^2} = 21,69\ \text{m}$ hosszú lesz. (1 pont)

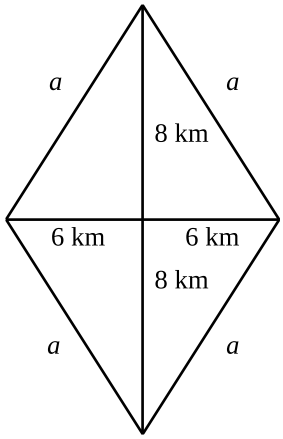
A második esetben $c_2 = 25$, tehát felírjuk azt, hogy $\cos\beta = \frac{20}{25}$, amiből $\beta = 36,87°$, ezután pedig itt is kiszámoljuk a háromszög területét, ami $T = \frac{20 \cdot 25 \cdot \sin 36,87°}{2} = 150\ \text{m}^2$. (1 pont)

A második esetben is megkapjuk az a és b oldalakat a területképletekből, vagyis $150 = \frac{20b}{2}$ és $150 = \frac{24a}{2}$, amikből $a = 12,5$ és $b = 15$. Ezt követően a c_1 oldal Pitagorasz-tétel alkalmazásával $c_1 = \sqrt{24^2 + 12,5^2} = 27,06\ \text{m}$ hosszú lesz. (1 pont)

Végezetül tehát a háromszögek oldalai **az első esetben 7 m, 24 m, 25 m és 8,4 m, 20 m, 21,69 m hosszúak, ahol a háromszögek területe $84\ \text{m}^2$, míg a második esetben a háromszögek oldalai 12,5 m, 24 m, 27,06 m és 15 m, 20 m, 25 m hosszúak, és ebben az esetben a háromszögek területe $150\ \text{m}^2$-rel egyenlő.** (1 pont)

b) A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, ezért az a oldalakat Pitagorasz-tétellel kiszámoljuk, vagyis $a^2 = 8^2 + 6^2$, amiből $a = 10$. (2 pont)

Egy rombusz kerületét a $K = 4a$ képlettel számoljuk, tehát a kerülete a rombusznak **40 km**. (1 pont)



c) Ezt a következő képlet segítségével tudjuk kiszámolni: $v = \frac{s}{t}$

Átalakítva a képletet és behelyettesítve az ismert adatokat: $s = v \cdot t = 28 \cdot 1,25 = 35$ km-t tesz meg 1,25 óra alatt. (1 pont)

Ezután megkapjuk, hogy $\frac{35}{56} \cdot 100 = 62,5$. (1 pont)

Tehát, az út **62,5%-át** teszi meg. (1 pont)

Összesen: 12 pont

3. Van 3 számunk, melyek egy számtani sorozatot alkotnak, összegük pedig 36. Ha az első számot változatlanul hagyjuk, a másodikhoz hozzáadunk 3-at, a harmadikhoz pedig 26-ot, akkor rendre egy mértani sorozat 3 egymást követő tagját kapjuk meg.

a) Adja meg a számtani és a mértani sorozatot alkotó számhármasokat! (6 pont)

Pali bácsi felvett 3 millió forint hitelt, melynek havi kamata 7%. A törlesztőrészlet havonta mindig egy azonos összeg, amit Pali bácsi minden hónap végén fizet.

b) Mennyit kell Pali bácsinak havonta fizetnie, ha 3 éven keresztül törleszti vissza a felvett hitelt? Válaszát egész számra kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy a számtani sorozat második eleme a $3 \cdot a_1 + 3d = 36$, vagyis $a_1 + d = a_2$ képlet miatt $a_2 = 12$ lesz, a mértani sorozat második eleme pedig 15 lesz. (1 pont)

Vagyis a számtani sorozatunk rendre: $12-d; 12; 12+d$, a mértani sorozat pedig $12-d; 15; 38+d$. (1 pont)

Tehát ha felírjuk az adatainkat, akkor az alábbi összefüggést kapjuk: $15^2 = (12-d)(38+d)$. (1 pont)

Amit rendezve a $d^2 + 26d - 231 = 0$ egyenletet kapjuk, aminek megoldásai a $d_1 = -33$ és $d_2 = 7$. (1 pont)

Innen két megoldásunk lesz, az egyik esetben a **számtani sorozatunk a 45, 12, -21 lesz, a mértani pedig a 45, 15, 5.** (1 pont)

A másik esetben pedig a **számtani sorozatunk 5, 12, 19 lesz, a mértani pedig 5, 15, 45.** (1 pont)

b) A törlesztőrészlet összege legyen x. Ekkor az első havi visszafizetés után még $3000000 \cdot 1,07 - x$ Ft-ot kell visszafizetnie.

A második hónapot követően még $(3000000 \cdot 1,07 - x) \cdot 1,07 - x$ Ft-ot, a harmadik hónapot követően még $((3000000 \cdot 1,07 - x) \cdot 1,07 - x) \cdot 1,07 - x$ Ft-ot és így tovább. (1 pont)

Így az adatok alapján felírhatjuk az alábbi egyenletet a 36. hónapra:

$\left(\left(\left(\left(3000000\cdot 1,07-x\right)\cdot 1,07-x\right)\cdot 1,07-x\right)...\right)\cdot 1,07-x=0$, ahol 35 zárójel szerepel az egyenlet bal oldalán. (1 pont)

Ezt az egyenletet átalakítva megkapjuk az alábbi összefüggést:

$3000000\cdot 1,07^{36}=1,07^{35}\cdot x+1,07^{34}\cdot x+1,07^{33}\cdot x+...+x$ (1 pont)

Az egyenlet jobb oldalán egy mértani sorozat összege szerepel, ezért átírhatjuk erre:

$3000000\cdot 1,07^{36}=x\cdot\dfrac{1,07^{36}-1}{1,07-1}$ (2 pont)

Ezt az egyenletet rendezve megkapjuk, hogy $x=230145,93$. (1 pont)

Tehát havonta **230 146 Ft-ot** kell Pali bácsinak törlesztenie. (1 pont)

Összesen: 13 pont

4. Egy zöldség-gyümölcs kereskedést üzemeltető francia néni almákat, banánokat, padlizsánokat és répákat árul. Ezek közül kiválasztunk 6 darabot, melyek súlya rendre: 178 g, 206 g, 159 g, 168 g, 178 g, 224 g.

a) Számítsa ki a kiválasztott áruk súlyának átlagát, szórását, valamint adja meg a mediánt és móduszt is! (5 pont)

Ezeket a gyümölcsöket egy-egy megfordított csonkakúp alakú dobozban szállítják ki a francia néni számára, melyeket a gyártó minden esetben lefest a benne szállított gyümölcs színével megegyező színnel. Ezeknek a dobozoknak az alkotója 40 cm, az alapkörök sugarai pedig 34 cm és 10 cm hosszúak.

b) Hány liter festékre van szüksége a gyártónak 150 doboz lefestéséhez, ha a doboz alját sosem festi be? (1 liter festék $1\ \mathrm{m}^2$ lefestéséhez elegendő.) (4 pont)

c) Hány liter egy-egy doboz térfogata? Válaszát 4 tizedesjegyre kerekítve adja meg! (3 pont)

Megoldás:

a) A 6 darab áru átlaga: $\dfrac{159+168+178+178+206+224}{6}=\dfrac{1113}{6}=\mathbf{185,5\ g}$ (1 pont)

A szórásuk:

$$\sqrt{\frac{\left(159-185,5\right)^2+\left(168-185,5\right)^2+2\left(178-185,5\right)^2+\left(206-185,5\right)^2+\left(224-185,5\right)^2}{6}}=\mathbf{22,4481}$$

(2 pont)

A medián, vagyis a helyzeti középérték **178 g.** (1 pont)

A módusz pedig, mint leggyakoribb elem, szintén **178 g.** (1 pont)

b) A csonkakúp felszínképletébe beírva, megkapjuk a felszínét egy doboznak: $A=\pi\left(34^2+10^2+40\cdot\left(34+10\right)\right)=3016\pi$ (1 pont)

Ebből még ki kell vonni az alját a doboznak, vagyis $3016\pi-100\pi=2916\pi\ \mathrm{cm}^2$ egy doboz lefestendő felszíne. (1 pont)

Mivel 150 ilyen dobozról van szó, ezért összesen $2916\pi\cdot 150=437000\pi=1374132,627\ \mathrm{cm}^2$, ami $137,41\ \mathrm{m}^2$. (1 pont)

Tehát összesen **137,41 liter** festékre van szükség a dobozok lefestéséhez. (1 pont)

c) A dobozok magassága Pitagorasz-tétel miatt: $m=\sqrt{40^2-24^2}=32$. (1 pont)

Ezután a csonkakúp térfogatképletébe írva megkapjuk a térfogatot: $V=\frac{32\pi}{3}\left(34^2+34\cdot 10+10^2\right)=17024\pi=53482,5\text{ cm}^3=53,4825\text{ dm}^3$ (1 pont)

Tehát a doboz térfogata **53,4825 liter**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Oldja meg az alábbi feladatokat a valós számok halmazán!

a) $\lg\sqrt[3]{x}\cdot\log_x 1000=\lg x^2+\lg\left(\frac{1}{x}\right)$ **(5 pont)**

b) $3\left|\left|5-x\right|-6\right|\le 9$ **(5 pont)**

c) $\left.\begin{matrix} x^2y+xy^2=12 \\ x^3+y^3=28 \end{matrix}\right\}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Első lépésként meghatározzuk az értelmezési tartományt, vagyis $x\ne 1$ és $x>0$. (1 pont)

A logaritmus azonosságai miatt $\frac{1}{3}\lg x\cdot\log_x 10^3=2\lg x+\lg x^{-1}$, (1 pont)

$\frac{1}{3}\lg x\cdot 3\log_x 10=2\lg x-\lg x$, (1 pont)

$\lg x\cdot\log_x 10=\lg x$, (1 pont)

$1=\lg x$, innen pedig a logaritmus definíciója alapján $\mathbf{x=10}$. (1 pont)

b) Szétválasztjuk az egyenlőtlenséget két részre, $3\left(\left|5-x\right|-6\right)\le 9$, ahol $\left|5-x\right|-6\ge 0$ és $3\left(-\left(\left|5-x\right|-6\right)\right)\le 9$, ahol $\left|5-x\right|-6<0$ részekre. (1 pont)

Az első esetben a $3\left(\left|5-x\right|-6\right)\le 9$ egyenlőtlenséget megoldva $x\in\left[-4;14\right]$, míg $\left|5-x\right|-6\ge 0$ megoldása $x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[11;\infty\right[$. Ezen megoldáshalmazok metszete az $x\in\left[-4;-1\right]\cup\left[11;14\right]$ halmaz lesz. (1 pont)

A második esetben a $3\left(-\left(\left|5-x\right|-6\right)\right)\le 9$ egyenlőtlenség megoldása $x\in\left]-\infty;2\right]\cup\left[8;\infty\right[$, az $\left|5-x\right|-6<0$ egyenlőtlenség megoldásai pedig az $x\in\left]-1;11\right]$ halmazban találhatóak. Ezen halmazok metszete pedig az $x\in\left]-1;2\right]\cup\left[8;11\right[$ halmaz lesz. (1 pont)

Tehát a megoldáshalmazok uniója az $\mathbf{x\in\left[-4;2\right]\cup\left[8;14\right]}$ lesz. (2 pont)

c) Az első egyenlet háromszorosát $\left(3x^2y+3xy^2=36\right)$ hozzáadjuk a második egyenlethez, így egy azonosságot kapunk, mivel $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=\left(x+y\right)^3=64$. (1 pont)

Ezt rendezve megkapjuk, hogy $y=4-x$. (1 pont)

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe az alábbi összefüggést kapjuk: $x^2\left(4-x\right)+x\left(4-x\right)^2=12$. (1 pont)

Ezt rendezve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk: $4x^2-16x+12=0$, aminek megoldásai az 1 és 3. Ezt visszahelyettesítve pedig ezek *y* párjai rendre: 3 és 1 lesznek. (1 pont)

Vagyis a megoldáspárjaink az $\mathbf{x_1=1;\ y_1=3}$ és $\mathbf{x_2=3;\ y_2=1}$ lesznek. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Összesen: 16 pont

6. Egy angol műszerész új hobbija, hogy homokórákat kezdett el gyártani. Ezek a homokórák kettő négyzet alapú gúlából állnak össze, melyek csúcsuknál érintkeznek egy 2 cm átmérőjű gömbbel. A homokóra tengelyesen szimmetrikus.

a) Számolja ki a homokóra térfogatát, ha a gúlák magassága külön-külön 12 cm, valamint a gúla élei $59,49°$ -os szöget zárnak be az alaplappal! Válaszát 2 tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

A műszerész különleges homokórákat is gyárt, melyeket szép díszkeretbe foglal. Ezen homokórák alakjukban hasonlítanak a többi homokórához, azonban méretük eltérő. A különleges homokórák gúláinak alaplapjának mérete $225\ \text{cm}^2$, a homokórák térfogata pedig $1,5\ \text{dm}^3$, a közöttük lévő gömb nagysága ugyanakkora. Ezek a keretek a legjobb minőségű cédrusfából készülnek. A keretek egy alaplapból és egy fedőlapból állnak, melyek a homokórát alkotó gúlák alaplapjánál helyezkednek el. A keret alap- és fedőlapja $45°$-kal van elforgatva a homokóra alapjához képest úgy, hogy annak csúcsai érintik az alap- és fedőlap oldalainak középpontját. A keret alap- és fedőlapját összesen 4 egybevágó henger köti össze, melyek a lapok sarkainál helyezkednek el úgy, hogy a lapokon nem lógnak túl.

b) Számítsa ki, hogy összesen hány köbcentiméter cédrusfa szükséges egy keret előállításához, ha az alap- és fedőlap vastagsága 1 cm, és a hengerek alapkörének a sugara a lehető legnagyobb! (7 pont)

Egy holland utazónak nagyon megtetszett a műszerész által készített keretes homokóra, így egyből rendelt is belőle 17 db-ot. Sajnos azonban néha ilyen nagy megrendelések esetében a műszerész hibásan készíti el a keretet.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a megrendelt 17 darabból maximum 2 lesz hibás, ha 87% annak a valószínűsége, hogy hibátlanul készít el egy keretes homokórát a művész? (4 pont)

Megoldás:

a) A gúlák alapjának oldalait ki tudjuk számolni az alaplap átlójának felével, ami felírva $\operatorname{tg} 59,49° = \dfrac{12}{\frac{\sqrt{2}a}{2}}$, amiből $a \approx 10$ cm. (2 pont)

A gúlák térfogata egyenként $V_{\text{gúla}} = \dfrac{12 \cdot 10^2}{3} = 400\ \text{cm}^3$. (1 pont)

A gömb térfogata pedig $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4 \cdot 1^3 \cdot \pi}{3} = 4,19\ \text{cm}^3$. (1 pont)

Az egész homokóra térfogata tehát: $V = 2 \cdot 400 + 4,19 = \mathbf{804,19\ cm^3}$ (1 pont)

b) Ha a gúla alapjának területe $225\ \text{cm}^2$, akkor az oldala a gúlának $\sqrt{225} = 15$ cm, és tudjuk, hogy $V = 1500\ \text{cm}^3 = 2 \cdot \dfrac{m \cdot 225}{3} + \dfrac{4 \cdot 1^3 \cdot \pi}{3}$, tehát $m_{\text{gúla}} = 9,9721\ \text{cm}^2$. (1 pont)

A keret alap- és fedőlapja pedig Pitagorasz-tétellel felírható úgy, hogy $2b^2 = 15^2$, vagyis $b = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} = 10,6066$, ahol a $2b$ jelöli a fedő- és alaplap oldalának hosszát. (1 pont)

Ezáltal az alap- és fedőlapok térfogata $V = 2 \cdot 2b \cdot 2b \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 10,6066 \cdot 2 \cdot 10,6066 \cdot 1 = 900\ \text{cm}^3$.
(1 pont)

A hengerek alapkörének sugarai megegyeznek az előbb felírt derékszögű háromszög beírható körének sugarával, vagyis $T=\frac{b^2}{2}=s\cdot r=\frac{112,5}{2}=\frac{2\cdot 10,6066+15}{2}\cdot r$, amit rendezve megkapjuk, hogy $r=3,1066$ cm. (1 pont)

Ezután ki tudjuk számolni a hengerek magasságát, ami a két gúla magasságának és a gömb átmérőjének összegével lesz egyenlő: $m_{\text{henger}}=2m_{\text{gúla}}+d=21,9441$ cm. (1 pont)

Tehát a 4 henger térfogata $4V_{henger}=4r^2\cdot\pi\cdot m=2661,33\ \text{cm}^3$. (1 pont)

Vagyis összesen $V=2661,33+900=\mathbf{3561,33\ cm^3}$. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy nincs benne hibás: $0,87^{17}=0,0937$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 hibás van benne az $\binom{17}{1}\cdot 0,13\cdot 0,87^{16}=0,2381$.

(1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 hibás van benne az $\binom{17}{2}\cdot 0,13^2\cdot 0,87^{15}=0,2846$.

(1 pont)

Tehát összesen $p=0,0937+0,2381+0,2846=\mathbf{0,6164}$ a valószínűség arra, hogy a megrendelt 17 darabból maximum 2 lesz hibás. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7. Egy koordináta-rendszerben adott három pont, melyek koordinátái $A(0;-3)$; $B(6;0)$ és $C(6;-4)$. A három pontot összekötve egy háromszöget kapunk.

a) Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely felezi a megadott háromszög területét, valamint párhuzamos az $x+4y=0$ egyenletű egyenessel! (10 pont)

Salamon megyében 7 város található, melyek szabályos hétszög alakban helyezkednek el. Minden város össze van kötve az összes többi várossal egy-egy egyenes úttal. Ahol legalább 2 út keresztezi egymást egy pontban, oda Salamon megye polgármestere szeretne egy-egy körforgalmat építeni.

b) Összesen hány körforgalom építésére szükséges építési engedélyt kérnie a polgármester titkárának? (6 pont)

Megoldás:

a) Kiszámoljuk a háromszög területét, ami $T=\frac{a\cdot m}{2}=\frac{4\cdot 6}{2}=12$ egységnégyzet nagyságú. (1 pont)

Az AB egyenes egyenlete $3x-6y=18$, a BC egyenes egyenlete $x=6$, az e egyenesünk egyenlete pedig $x+4y=0$. (1 pont)

Ezekből megkapjuk a D és E pontokat, amik elmetszik az AB és BC oldalainkat, amiknek koordinátái $D(4;-1)$ és $E(6;-1,5)$. (1 pont)

Az így meghatározott BDE háromszög területe $T=\frac{a\cdot m}{2}=\frac{2\cdot 1,5}{2}=1,5$. (1 pont)

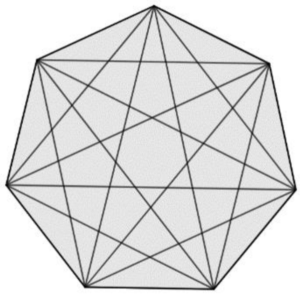
Viszont nekünk egy 6 egységnégyzet területű háromszög kell, ami hasonló lesz a BDE háromszöghöz, viszont emiatt egy $\lambda=4$ változót bevezetünk, mivel a területe negyede a keresett háromszög területének. (2 pont)

Mivel a *BDE* háromszögünk magassága 2, ezért a keresett háromszög magasságának $m = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$ hosszúnak kell lennie. (1 pont)

Ezáltal van egy normálvektorunk, az $n(1;4)$ és egy fixpontunk a háromszögből, ami a $(2;-2)$ koordináta. (2 pont)

Így az alábbi egyenes egyenletét megkapjuk a normálvektoros egyenlet segítségével, ami az $\boldsymbol{x + 4y = -6}$ egyenlet lesz. (1 pont)

b) Egy szabályos hétszögben csak a belső éleknél építhetünk körforgalmakat, mivel a külső éleken nem halad át másik él. (1 pont)



A belső élekből összesen $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ darab található. (1 pont)

A 14 élből 7 darab olyan van, ami rövidebb él, és két olyan csúcsot köt össze, amik között 1 csúcs van, és 7 darab olyan él van, ami hosszabb, és a két csúcs között 2 másik csúcs helyezkedik el. (1 pont)

A rövidebb belső éleken összesen mindig 4 másik él halad át, ami miatt mindegyik rövidebb belső élre 4 körforgalmat kellene építtetni, a hosszabbik éleken viszont 6 másik él halad át minden esetben, ezért azokra 6 körforgalmat kellene építeni. (1 pont)

Mivel mindegyik körforgalmon két út megy át, ezért ezt még le kell osztanunk kettővel, mivel kétszer számoltuk mindegyik körforgalmat. (1 pont)

Tehát összesen $\frac{7 \cdot 4 + 7 \cdot 6}{2} = \mathbf{35}$ **körforgalom** építésére van szükség Salamon megyében. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8. Egy osztályba összesen 11 diák jár; 5 fiú és 6 lány.

a) Hányféle sorrendben tudnak beállni tornaórán egy sorba, ha csak az számít, hogy két azonos nemű diák nem állhat egymás mellett? (4 pont)

Az egyik héten futóversenyt rendeztek az osztályban, ahol összesen háromféle díjat sorsoltak ki a diákok között, mindegyik díjból 2-2 db-ot.

b) Hányféleképpen tudják kiosztani a tanárok a díjakat, ha egy diák összesen 1 db díjat nyerhet? (4 pont)

c) Hányféleképpen alakulhat a futóverseny első 3 helyezettjének sorrendje, ha két azonos nemű diák nem futott be egymás után a célba? (3 pont)

Az egyik irodalomórán a tanár a 11 diák közül 3 diákot választ ki, akik felelni fognak. Az osztályból 2 ember kivételével mindenki felkészült az órára.

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanár legfeljebb az egyik olyan diákot hívja ki a táblához, aki nem készült? (5 pont)

Megoldás:

a) Mivel nem állhatnak egymás mellett azonos neműek, ezért a nemeknek felváltva kell sorba állnia. Mivel több lány van az osztályban, mint fiú, így ez csak akkor teljesül, ha lány áll a sor elején. (1 pont)

A fiúk $5!$ féleképpen tudnak sorba állni, a lányok pedig $6!$ féleképpen, és ezek szorzata fogja megadni a lehetséges sorrendek számát, ami $5! \cdot 6! = 86400$. (2 pont)

Tehát összesen **86 400 féleképpen** tudnak sorba állni. (1 pont)

b) Mivel összesen 6 díj van, ezért $\binom{11}{6}$ féleképpen dönthetjük el azt, ki kapjon díjat. (1 pont)

Azt, hogy akik kapnak, azok hányféleképpen kaphatnak díjakat, azt $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ féleképpen oszthatjuk szét. (2 pont)

Tehát összesen $\binom{11}{6}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$, vagyis **41 580 féleképpen** oszthatjuk szét a díjakat. (1 pont)

c) Abban az esetben, ha a sorrend fiú-lány-fiú volt, akkor azt $5\cdot 6\cdot 4=120$ féleképpen lehetséges. (1 pont)

Abban az esetben pedig, ha a sorrend lány-fiú-lány volt, akkor azt $6\cdot 5\cdot 5=150$ féleképpen lehetséges. (1 pont)

Tehát összesen $120+150=$ **270 féleképpen** tudnak bejutni a célba. (1 pont)

d) Az összes olyan eset, hogy mindenki tanult: $\binom{9}{3}=84$. (1 pont)

Azon esetek száma, amikor 2 ember tanult és az egyik nem: $\binom{9}{2}\cdot\binom{2}{1}=72$. (1 pont)

Az összes lehetséges eset száma: $\binom{11}{3}=165$. (1 pont)

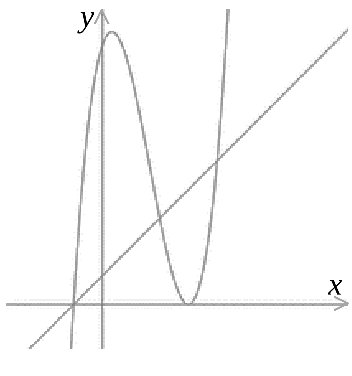
Vagyis a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 1 olyan diákot hív ki a tanár, aki nem készült: $\frac{\binom{9}{3}+\binom{9}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}=\mathbf{0{,}9455.}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

9. Adott az alábbi két függvény:

$$\boldsymbol{f(x)=(x+1)(x^2-6x+9)}$$

$$\boldsymbol{g(x)=x+1}$$



a) Mekkora a két függvény közre zárt területeinek az összege a $[-1;4]$ intervallumon? (8 pont)

b) Határozza meg $\frac{f}{g^3}$ függvény határértékét $-\infty$-ben és ∞-ben! (4 pont)

c) Adja meg a $h(x)=-2x^2+9x-4$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőértékeit! (4 pont)

Megoldás:

a) A metszéspontokat úgy kapjuk meg, ha a két függvényt egyenlővé tesszük. Ezután ezen metszéspontok között kell integrálni a közbezárt területet, tehát ott, ahol $f=g$, vagyis $(x+1)(x^2-6x+9)=x+1$, amit $x+1$-gyel egyszerűsítve, és –1-et gyökként megkapva megkapjuk a $0 = x^2 - 6x + 8$ másodfokú egyenletet, ezt megoldva megkapjuk, hogy a másik két pontunk a 4 és a 2 lesznek. (1 pont)

A két függvény közti terület a függvények különbségének határozott integráljával számolható ki, ezért az alábbi integrálást kell elvégeznünk:

$$\int_{-1}^{2} x^3 - 5x^2 + 3x + 9 - (x+1)\, dx + \int_{2}^{4} x + 1 - \left(x^3 - 5x^2 + 3x + 9\right) dx,$$ (1 pont)

ami $\int_{-1}^{2} x^3 - 5x^2 + 2x + 8\, dx + \int_{2}^{4} -x^3 + 5x^2 - 2x - 8\, dx$ (1 pont)

A Newton-Leibniz formulával számítsuk ki a határozott integrált:

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_{-1}^{2} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - x^2 - 8x\right]_{2}^{4}$$ (2 pont)

Ebből azt kapjuk, hogy: $\left(\frac{2^4}{4} - \frac{5\cdot 2^3}{3} + 2^2 + 8\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{5\cdot(-1)}{3} + 1 - 8\right) = \frac{40}{3} - \left(\frac{61}{12}\right) = 15{,}75$,

$$\left(-\frac{4^4}{4} + \frac{5\cdot 4^3}{3} - 4^2 - 8\cdot 4\right) - \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{5\cdot 2^3}{3} - 2^2 - 8\cdot 2\right) = -\frac{16}{3} - \left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$ (2 pont)

Tehát a keresett terület ezek összege, azaz **21,08 területegység.** (1 pont)

b) Írjuk fel a $\frac{f}{g^3}$ függvényt:

$$\frac{f}{g^3} = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$ (1 pont)

Ezután leosztunk x^3-nal és megkapjuk, hogy a $\dfrac{1 - \frac{5}{x} + \frac{3x}{x^2} + \frac{9}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$ törtet kell vizsgáljuk, amiből kiderül, hogy $-\infty$-ben és $+\infty$-ben is 1-hez fog tartani a számláló és a nevező is. (2 pont)

Tehát a függvény **1-hez fog tartani $-\infty$-ben és ∞-ben is.** (1 pont)

c) A függvénynek ott van zérushelye, ahol a függvény értéke 0, tehát $-2x^2 + 9x - 4 = 0$. (1 pont)

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva $x_1 = 4$ és $x_2 = \frac{1}{2}$ lesz a két gyökünk, vagyis a **4** és az $\mathbf{\frac{1}{2}}$ lesz a függvényünk két zérushelye. (1 pont)

A függvénynek ott lesz lokális szélsőértéke, ahol az első derivált értéke nulla és a második derivált értéke nem nulla, vagyis $h'(x) = -4x + 9 = 0$ és $h''(x) = -4 \neq 0$. (1 pont)

Amiből $\mathbf{x = 2{,}25}$ lesz az egyetlen lokális szélsőérték helye. (1 pont)

Összesen: 16 pont

A szerezhető maximális pontszám: 115 pont