PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2022. február 19.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ
PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

2022. február 19.

Az írásbeli vizsga időtartama: 240 perc

Kérjük nyomtatott nagybetűvel töltse ki!

Név	
Teremszám	
Pontszám	
E-mail cím	

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA SZEKCIÓ

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

   A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
11. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Timi gondolt egy ötjegyű számra, azonban ennek két számjegyét eltakarta Máté elől: $\overline{7a85b}$.

a) Segítsen Máténak, és adja meg az összes olyan *ab* számpárt, melyre teljesül az, hogy az ötjegyű szám osztható lesz 12-vel!

Adott a 10-es számrendszerbeli 427_{10}.

b) Írja át ezt a számot 3-as számrendszerbe!

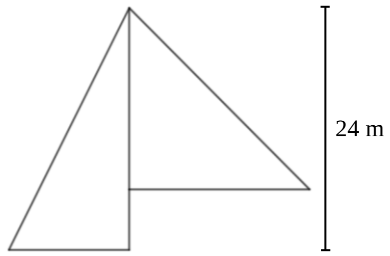
c) Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám!

Adott az alábbi állítás: *„Minden szám osztható 24-gyel, ha osztható 4-gyel és 6-tal.”*

d) Fogalmazza meg az állítás tagadását, valamint adja meg annak logikai értékét. Amennyiben az állítás tagadása hamis, tegye igazzá!

a)	**4 pont**	
b)	**2 pont**	
c)	**5 pont**	
d)	**3 pont**	
Ö.:	**14 pont**	

2. Egy vitorláshajónak két különböző derékszögű háromszög alakú vitorlája van, melyek területe megegyezik. Az árbóc hossza 24 m, valamint azt is tudjuk, hogy a két vitorla magasságának aránya 5:6.



a) Mekkora a két háromszög területe, és mekkorák az oldalai, ha tudjuk, hogy az egyik vitorla átfogója 25 m?

Kiválasztunk a Balaton partján 4 várost: Balatonboglárt, Balatonszepezdet, Balatonakalit és Balatonszemest, melyek egy rombuszt alkotnak.

b) Hány km-t tesz meg a hajó, ha egy körutat szeretne tenni a 4 várost meglátogatva, ha tudjuk, hogy Balatonboglár és Balatonakali távolsága 16 km, valamint Balatonszepezd és Balatonszemes távolsága 12 km?

c) Egy másik hajóút hossza 56 km. Az összes út hány százalékát teszi meg a hajó 1,25 óra alatt, ha sebessége állandó, 28 km/h?

a)	**6 pont**	
b)	**3 pont**	
c)	**3 pont**	
Ö.:	**12 pont**	

3. Van 3 számunk, melyek egy számtani sorozatot alkotnak, összegük pedig 36. Ha az első számot változatlanul hagyjuk, a másodikhoz hozzáadunk 3-at, a harmadikhoz pedig 26-ot, akkor rendre egy mértani sorozat 3 egymást követő tagját kapjuk meg.

a) Adja meg a számtani és a mértani sorozatot alkotó számhármasokat!

Pali bácsi felvett 3 millió forint hitelt, melynek havi kamata 7%. A törlesztőrészlet havonta mindig egy azonos összeg, amit Pali bácsi minden hónap végén fizet.

b) Mennyit kell Pali bácsinak havonta fizetnie, ha 3 éven keresztül törleszti vissza a felvett hitelt? Válaszát egész számra kerekítve adja meg!

a)	**6 pont**	
b)	**7 pont**	
Ö.:	**13 pont**	

4. Egy zöldség-gyümölcs kereskedést üzemeltető francia néni almákat, banánokat, padlizsánokat és répákat árul. Ezek közül kiválasztunk 6 darabot, melyek súlya rendre: 178 g, 206 g, 159 g, 168 g, 178 g, 224 g.

a) Számítsa ki a kiválasztott áruk súlyának átlagát, szórását, valamint adja meg a mediánt és móduszt is!

Ezeket a gyümölcsöket egy-egy megfordított csonkakúp alakú dobozban szállítják ki a francia néni számára, melyeket a gyártó minden esetben lefest a benne szállított gyümölcs színével megegyező színnel. Ezeknek a dobozoknak az alkotója 40 cm, az alapkörök sugarai pedig 34 cm és 10 cm hosszúak.

b) Hány liter festékre van szüksége a gyártónak 150 doboz lefestéséhez, ha a doboz alját sosem festi be? (1 liter festék 1 m^2 lefestéséhez elegendő.)

c) Hány liter egy-egy doboz térfogata? Válaszát 4 tizedesjegyre kerekítve adja meg!

a)	**5 pont**	
b)	**4 pont**	
c)	**3 pont**	
Ö.:	**12 pont**	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Oldja meg az alábbi feladatokat a valós számok halmazán!

a) $\lg \sqrt[3]{x} \cdot \log_x 1000 = \lg x^2 + \lg\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $3\left|\left|5-x\right|-6\right| \leq 9$

c) $\left.\begin{aligned} x^2y + xy^2 &= 12 \\ x^3 + y^3 &= 28 \end{aligned}\right\}$

a)	**5 pont**	
b)	**5 pont**	
c)	**6 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

6. Egy angol műszerész új hobbija, hogy homokórákat kezdett el gyártani. Ezek a homokórák kettő négyzet alapú gúlából állnak össze, melyek csúcsuknál érintkeznek egy 2 cm átmérőjű gömbbel. A homokóra tengelyesen szimmetrikus.

a) Számolja ki a homokóra térfogatát, ha a gúlák magassága külön-külön 12 cm, valamint a gúla élei $59,49°$-os szöget zárnak be az alaplappal! Válaszát 2 tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A műszerész különleges homokórákat is gyárt, melyeket szép díszkeretbe foglal. Ezen homokórák alakjukban hasonlítanak a többi homokórához, azonban méretük eltérő. A különleges homokórák gúláinak alaplapjának mérete $225\ \text{cm}^2$, a homokórák térfogata pedig $1,5\ \text{dm}^3$, a közöttük lévő gömb nagysága ugyanakkora. Ezek a keretek a legjobb minőségű cédrusfából készülnek. A keretek egy alaplapból és egy fedőlapból állnak, melyek a homokórát alkotó gúlák alaplapjánál helyezkednek el. A keret alap- és fedőlapja $45°$-kal van elforgatva a homokóra alapjához képest úgy, hogy annak csúcsai érintik az alap- és fedőlap oldalainak középpontját. A keret alap- és fedőlapját összesen 4 egybevágó henger köti össze, melyek a lapok sarkainál helyezkednek el úgy, hogy a lapokon nem lógnak túl.

b) Számítsa ki, hogy összesen hány köbcentiméter cédrusfa szükséges egy keret előállításához, ha az alap- és fedőlap vastagsága 1 cm, és a hengerek alapkörének a sugara a lehető legnagyobb!

Egy holland utazónak nagyon megtetszett a műszerész által készített keretes homokóra, így egyből rendelt is belőle 17 db-ot. Sajnos azonban néha ilyen nagy megrendelések esetében a műszerész hibásan készíti el a keretet.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a megrendelt 17 darabból maximum 2 lesz hibás, ha 87% annak a valószínűsége, hogy hibátlanul készít el egy keretes homokórát a művész?

a)	**5 pont**	
b)	**7 pont**	
c)	**4 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

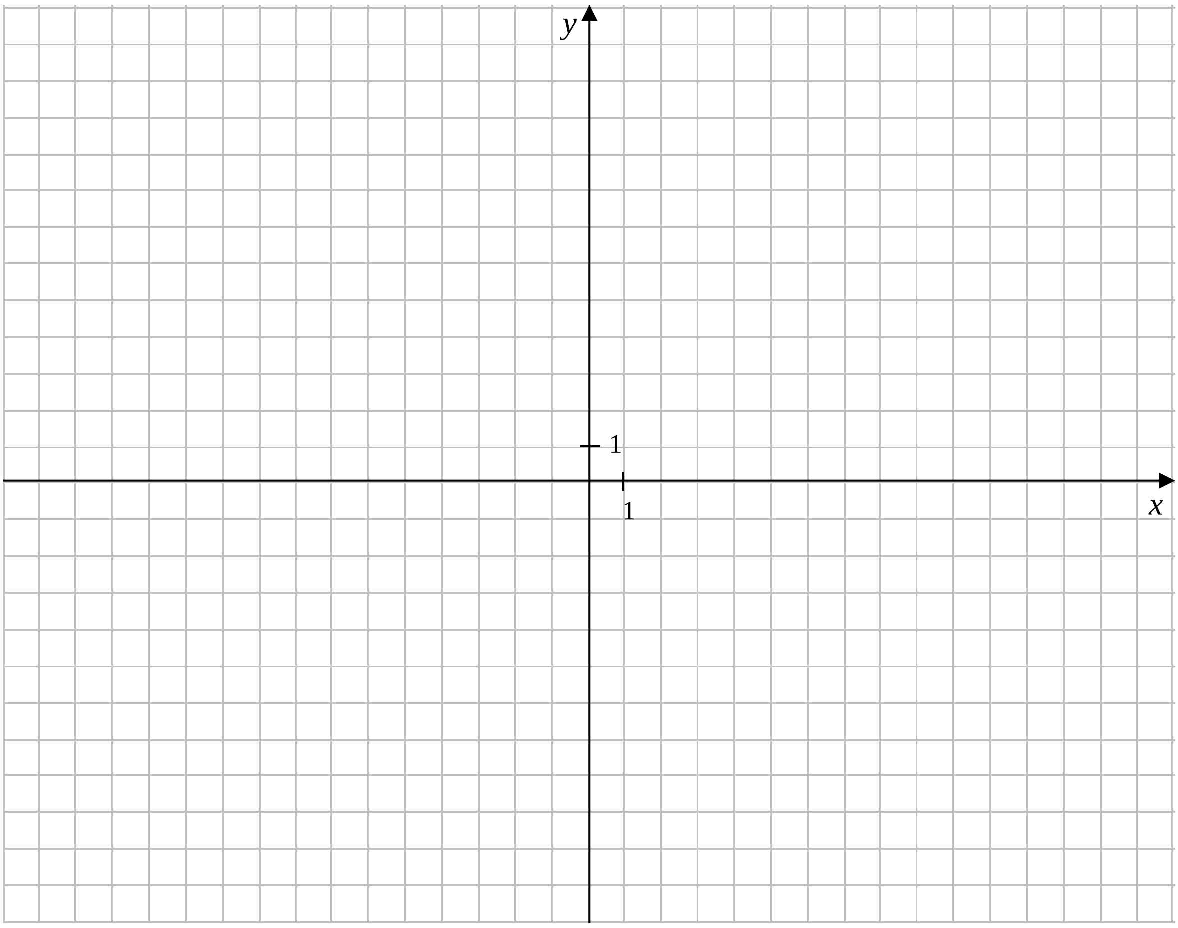
7. Egy koordináta-rendszerben adott három pont, melyek koordinátái $A(0;-3)$; $B(6;0)$ és $C(6;-4)$. A három pontot összekötve egy háromszöget kapunk.

a) Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely felezi a megadott háromszög területét, valamint párhuzamos az $x+4y=0$ egyenletű egyenessel!

Salamon megyében 7 város található, melyek szabályos hétszög alakban helyezkednek el. Minden város össze van kötve az összes többi várossal egy-egy egyenes úttal. Ahol legalább 2 út keresztezi egymást egy pontban, oda Salamon megye polgármestere szeretne egy-egy körforgalmat építeni.

b) Összesen hány körforgalom építésére szükséges építési engedélyt kérnie a polgármester titkárának?

a)	**10 pont**	
b)	**6 pont**	
Ö.:	**16 pont**	


y
1
1
x

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

8. Egy osztályba összesen 11 diák jár; 5 fiú és 6 lány.

a) Hányféle sorrendben tudnak beállni tornaórán egy sorba, ha csak az számít, hogy két azonos nemű diák nem állhat egymás mellett?

Az egyik héten futóversenyt rendeztek az osztályban, ahol összesen háromféle díjat sorsoltak ki a diákok között, mindegyik díjból 2-2 db-ot.

b) Hányféleképpen tudják kiosztani a tanárok a díjakat, ha egy diák összesen 1 db díjat nyerhet?

c) Hányféleképpen alakulhat a futóverseny első 3 helyezettjének sorrendje, ha két azonos nemű diák nem futott be egymás után a célba?

Az egyik irodalomórán a tanár a 11 diák közül 3 diákot választ ki, akik felelni fognak. Az osztályból 2 ember kivételével mindenki felkészült az órára.

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanár legfeljebb az egyik olyan diákot hívja ki a táblához, aki nem készült?

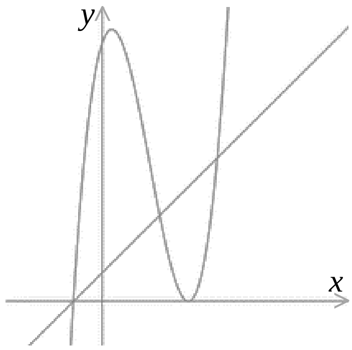
a)	**4 pont**	
b)	**4 pont**	
c)	**3 pont**	
d)	**5 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

9. Adott az alábbi két függvény:

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 9)$$

$$g(x) = x + 1$$



a) Mekkora a két függvény közre zárt területeinek az összege a $[-1;\ 4]$ intervallumon?

b) Határozza meg $\frac{f}{g^3}$ függvény határértékét $-\infty$-ben és ∞-ben!

c) Adja meg a $h(x) = -2x^2 + 9x - 4$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőértékeit!

a)	**8 pont**	
b)	**4 pont**	
c)	**4 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

	feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	14		**51**	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	12			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli próbavizsga pontszáma				**115**	

javító tanár