PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. február 13.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

2021. február 13.

Az írásbeli próbavizsga időtartama: 240 perc

Kérjük, nyomtatott nagy betűkkel töltse ki!

Név	
E-mail cím	
SG-s csoport	
Pontszám	

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

   $\square$

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**

   A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**

7. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
8. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
9. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
10. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
11. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Egy filmstúdió az elmúlt évben nyolc filmet gyártott. A filmek játékidejéből képzett sokaság átlaga 110 perc, az egyetlen módusza 90 perc. A filmek közül pontosan kettő hossza megegyezik az átlaggal. A játékidők mediánja 105 perc, a leghosszabb film 160 perces. Továbbá ismert, hogy mindegyik film játékideje percben mérve osztható 10-zel.

a) Adja meg a filmek játékidejének szórását!

Egy budapesti moziban az említett filmekre egy nap alatt 1500 darab jegyet vásároltak összesen. Az eladott jegyek 35%-a diákjegy, 20%-a gyermekjegy, 10%-a nyugdíjas jegy, a maradék pedig teljes árú jegy volt. A teljes árú mozijegy 2000 Ft-ba kerül, a gyermekjegyek 20%, a diák- és nyugdíjas jegyek 15% kedvezménnyel vásárolhatók meg.

b) Mekkora volt a mozi bevétele az említett filmek vetítéséből ezen a napon?

Ebben a moziban jelenleg összesen 12 különböző filmet játszanak, melyből 3 magyar, 5 amerikai, a maradék pedig más országból származik. Juli fanatikus mozirajongó, ezért mindegyik filmet meg szeretné nézni.

c) Hányféle sorrendben nézheti meg ezeket a filmeket, ha minden filmet pontosan egyszer néz meg, illetve magyar film után mindenképpen amerikai filmet néz (tehát az utolsó megnézett film sem lehet magyar)?

a)	**6 pont**	
b)	**2 pont**	
c)	**5 pont**	
Ö.:	**13 pont**	

2. Egy vállalat tíz dolgozója megbeszélést tart, amelyen két kérdésről is szavaznak, és csak igennel vagy nemmel lehet voksolni, a szavazás pedig titkos. Egy kérdést csak akkor tekintenek megszavazottnak, ha legalább nyolc darab igen szavazat érkezik rá. A megbeszélés során véletlenül összekeveredtek a két kérdésre adott szavazatok: összesen 14 igen és 6 nem szavazat érkezett a kérdésekre.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy az első kérdést megszavazták?

A megbeszélésre fejenként egy kávét rendeltek. A kiszállító futár sajnos már későn vette észre, hogy a kávézóban elfelejtették ráírni a kávékra, hogy koffeinmentesek-e. A futárnál nagyon sok kávé van, ugyanis egy fuvar alatt több rendelést is teljesít. Tapasztalatai alapján úgy becsüli, hogy egy kávé 0,15 valószínűséggel koffeinmentes.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a cég dolgozói egynél több koffeinmentes kávét kapnak a futártól?

A kávézó, ahonnan rendeltek, a következő stratégiát alkalmazza: minden hónap elején 10%-kal megemeli a kávé aktuális árát, majd ezt rögtön csökkenti 50 Ft-tal. Jelenleg egy kávé 1000 Ft-ba kerül.

c) Hány hónap után fogja meghaladni az 1500 Ft-ot a kávé ára?

a)	**4 pont**	
b)	**4 pont**	
c)	**6 pont**	
Ö.:	**14 pont**	

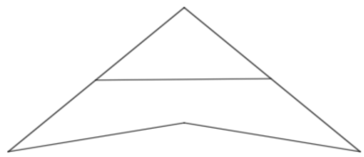
3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg\left(x^3-1\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x^2-2x+1\right)=\lg 21$

b) $\sqrt{\left(\operatorname{ctg} x-\sin x\cdot\cos x\right)\operatorname{tg} x}=1$

a)	**8 pont**	
b)	**5 pont**	
Ö.:	**13 pont**	

4. Egy sárkányrepülőt szeretnénk készíteni. Ennek a „szárny” része egy szimmetrikus konkáv négyszög alakú vászon, melynek két-két oldala 6 és 5 méter hosszú, a konkáv szöge pedig $220°$-os. Erre egy oldaltól oldalig érő fémrudat szeretnénk rögzíteni, amely a repülő többi részével való kapcsolatot fogja biztosítani. A repülés közben fontos a megfelelő egyensúly, így a fémrúdnak merőlegesnek kell lennie a konkáv szárny szimmetriatengelyére, továbbá úgy kell rögzíteni, hogy a szárny rúd fölé eső területe megegyezzen a rúd alá eső területtel.



a) Hány méter hosszú ez a szükséges fémrúd? (A fémrúd vastagságától eltekintünk, továbbá tudjuk, hogy a rúd egyenese végig a négyszögön belül halad.)

Ádám 90 percre bérel ki egy sárkányrepülőt, amivel átlagosan 20 km/h sebességgel tud repülni. Egy 0,5 kilométer sugarú kör mentén szeretne végig repülni.

b) Hány kört tud megtenni a bérlési ideje alatt, ha már nem kezd meg egy újabb kört, amennyiben azt nem tudja időben befejezni?

a)	**8 pont**	
b)	**3 pont**	
Ö.:	**11 pont**	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Egy térképre ráhelyezünk egy koordinátarendszert, amelyen egy egység egy kilométernek felel meg. Ezen az *A* falu koordinátái $(2;2)$, a *B* falué pedig $(5;1)$. A *C* falu koordinátáit nem tudjuk pontosan leolvasni, viszont tudjuk, hogy az *A* falutól 3 km a távolsága. Ezen kívül lemérjük, hogy a *C* falu az *A* és *B* falu által meghatározott szakaszról $60°$-os szögben látszik.

a) Határozza meg a *C* falu koordinátáit, ha tudjuk, hogy a másik két faluhoz hasonlóan az első síknegyedben található! Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!

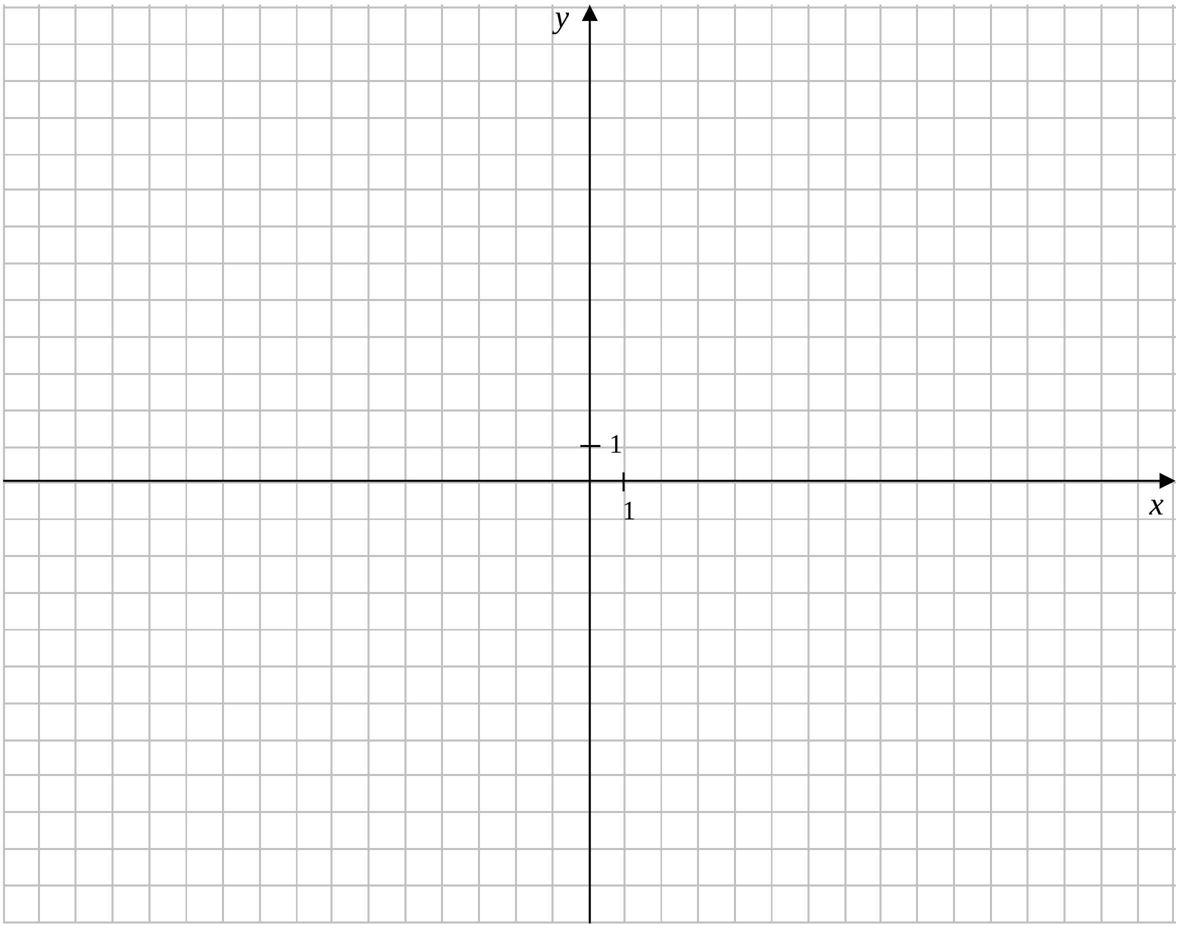
Az *A*, *B* és *C* falvak még öt faluval kiegészülve minden évben közös falunapot tartanak. Ezen megrendezésre kerül az úgynevezett „pörkölt főző bajnokság”. Ennek az a különlegessége, hogy a falvak párbajokban mérkőznek meg, és minden viadalra más-más étellel kell előállnia mindenkinek, az adott párbaj győzteséről pedig egy független zsűri dönt. A bajnokság egy csoportkörrel kezdődik, amelyben két négyfős csoportba osztják be a nyolc falut, és a saját csoportjában mindenki megküzd mindenkivel. Ezek alapján mindkét csoportból a legjobb két falu jut tovább, innentől egyenes ági kiesés érvényes a versenyre (tehát a harmadik helyért már nem tartanak párbajt).

b) Hányféle étel készül összesen a bajnokságon, ha tudjuk, hogy nem készült két egyforma étel?

A csoportkör után a négy továbbjutott falu közül teljesen véletlenszerűen sorsolják ki a megmérkőző párokat. (Tehát előfordulhat, hogy éppen az azonos csoportból továbbjutó falvak mérkőznek meg egymás ellen.) Tudjuk, hogy az *A* falu a csoportkörben az első csoportban volt és továbbjutott. A *B* falu a második csoportba került, viszont itt még nem tartották meg a párbajokat.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az *A* és a *B* falu főznek a döntőben egymás ellen, ha úgy számolunk, hogy minden falu egyenlően esélyes (vagyis mindenki $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer egy párbajon)?

a)	**9 pont**	
b)	**3 pont**	
c)	**4 pont**	
Ö.:	**16 pont**	


y
1
1
x

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

6. Adott az alábbi két függvény:

$$f(x) = x^2 + 5x - 4$$

$$g(x) = 3x - 1$$

a) Számítsa ki az $f - 2g$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőérték helyét/helyeit!

b) Határozza meg az f és g függvények grafikonjai által közbezárt terület nagyságát!

c) Határozza meg a $\frac{g^2}{f}$ függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben vett határértékeit!

a)	**6 pont**	
b)	**6 pont**	
c)	**4 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

7. Egy ékszerész olyan gyémántokat készít, amelyek egy szabályos hatszög alapú egyenes gúlából és egy szintén szabályos hatszög alapú egyenes csonka gúlából állnak össze. A gúla alapja, illetve a csonka gúla nagyobb alapja tökéletesen egyformák és ezek illeszkednek egymáshoz. A gúla alapja egy 3 egység oldalhosszúságú szabályos hatszög, a csonka gúla másik alapjának oldalai pedig 2 egység hosszúak. A gúla palástját alkotó háromszögek szárai 5 egység hosszúak, a csonka gúla magassága éppen a gúla magasságának felével egyezik meg.

a) Számítsa ki egy ilyen gyémánt térfogatát!

A kereslet növekedése miatt már három gép segítségével gyártja az ékszerész a gyémántokat. Az első gép által készült gyémántok közül minden 20. selejtes, a második gép 92%-os hatékonysággal dolgozik. Az összes gyémánt 40%-át az első gép, 30%-át a második gép, a maradékot pedig a harmadik gép gyártja.

b) A harmadik gép milyen hatékonysággal dolgozik, ha tudjuk, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott selejtes gyémánt $\frac{9}{31}$ valószínűséggel a harmadik gépből származik?

a)	**8 pont**	
b)	**8 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy társaság új hobbija a szabadulószoba, ezért az utóbbi héten három szobát is meglátogattak. Mindegyik esetben 60 perc állt rendelkezésre a kijutásra, és nagy örömükre mindig sikerült időben kiszabadulniuk. A három kijutási idő (percben mérve) egy számtani sorozatot alkot. A legrövidebb időből 36 percet, a középsőből 5 percet kivonva, a leghosszabbhoz pedig 170 percet hozzáadva egy olyan mértani sorozathoz jutunk, melynek kvóciense megegyezik az eredeti számtani sorozat differenciájával.

a) Hány perc volt a társaság legrövidebb kijutási ideje?

Az egyik szobában a kijutást biztosító utolsó kulcs egy érdekes díszdobozba volt elrejtve. Ez egy olyan félgömb alakú doboz, amelyben még benne van egy kipárnázott kocka alakú kisebb doboz úgy, hogy a kocka egyik lapja a félgömb síkmetszetére esik, a szemben lévő négy csúcsa pedig belülről érinti a félgömböt.

b) Mekkora ennek a díszdoboznak a felszíne a kocka oldalának függvényében, ha ez a félgömb zárt, vagyis a kocka kívülről nem látható?

a)	**9 pont**	
b)	**7 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2 oldalon található üres négyzetbe!

9. Tekintsük a következő állítást: „Minden pozitív egész *n* esetén a $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$ kifejezés osztható 17-tel.”

a) Fogalmazza meg az állítás tagadását!

b) Döntse el, hogy igaz-e az állítás! Válaszát indokolja!

A 63 462 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

c) Így hány ötjegyű számot kapunk, és ezek közül hány darab lesz négyzetszám?

a)	**2 pont**	
b)	**8 pont**	
c)	**6 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

	feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	13		**51**	
	2.	14			
	3.	13			
	4.	11			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli próbavizsga pontszáma				**115**	

javító tanár