PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. február 13.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Javítási útmutató

2021. február 13.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

1. Egy filmstúdió az elmúlt évben nyolc filmet gyártott. A filmek játékidejéből képzett sokaság átlaga 110 perc, az egyetlen módusza 90 perc. A filmek közül pontosan kettő hossza megegyezik az átlaggal. A játékidők mediánja 105 perc, a leghosszabb film 160 perces. Továbbá ismert, hogy mindegyik film játékideje percben mérve osztható 10-zel.

a) Adja meg a filmek játékidejének szórását! (6 pont)

Egy budapesti moziban az említett filmekre egy nap alatt 1500 darab jegyet vásároltak összesen. Az eladott jegyek 35%-a diákjegy, 20%-a gyermekjegy, 10%-a nyugdíjas jegy, a maradék pedig teljes árú jegy volt. A teljes árú mozijegy 2000 Ft-ba kerül, a gyermekjegyek 20%, a diák- és nyugdíjas jegyek 15% kedvezménnyel vásárolhatók meg.

b) Mekkora volt a mozi bevétele az említett filmek vetítéséből ezen a napon? (2 pont)

Ebben a moziban jelenleg összesen 12 különböző filmet játszanak, melyből 3 magyar, 5 amerikai, a maradék pedig más országból származik. Juli fanatikus mozirajongó, ezért mindegyik filmet meg szeretné nézni.

c) Hányféle sorrendben nézheti meg ezeket a filmeket, ha minden filmet pontosan egyszer néz meg, illetve magyar film után mindenképpen amerikai filmet néz (tehát magyar nem lehet az utolsó megnézett film)? (5 pont)

***Megoldás*:**

a) Tudjuk, hogy összesen 8 film van, és az átlaguk 110 perc, vagyis a filmek összesen 880 perc hosszúak. Emellett a további adatokból tudjuk, hogy 1 darab 160 perces, 2 darab 110 perces van. (1 pont)

Ezen kívül a mediánból, valamint a páros elemszámból kiderül, hogy két szomszédos tag számtani közepe lesz a 105, vagyis 100 lesz a másik szám, ami a mediánt határozza meg a 110 mellett. (1 pont)

Végül pedig tudjuk, hogy legalább 3 darab 90 perces film van, mivel 110 percesből 2 db van, és az egyetlen módusz a 90. Viszont legfeljebb is 3 db 90 perces lehet, mivel ha 4 lenne, akkor a medián nem lehete 105, vagy az átlag nem érné el a 110-et. (1 pont)

Az utolsó film idejét pedig az átlag segítségével kapjuk meg:

$\frac{3\cdot 90+100+2\cdot 110+160+x}{8}=110$, amit ha rendezünk, kiderül, hogy az utolsó film hossza 130 perc. (1 pont)

Tehát a filmek hosszai: 90, 90, 90, 100, 110, 110, 130, 160 perc.

Majd a szórás képletét felírva megkapjuk, hogy:

$$\sqrt{\frac{3\cdot(110-90)^2+(110-100)^2+2\cdot(110-110)^2+(110-130)^2+(110-160)^2}{8}}=5\sqrt{21},$$

mindez egyenlő **22,91 perccel**, ami a szórása lesz a filmeknek. (2 pont)

b) Az adatokból következik, hogy a jegyek 2000 Ft-ba kerülnek a felnőtteknek, 1700 Ft-ba a nyugdíjasoknak és a diákoknak, és 1600 Ft-ba a gyerekeknek. Emellett az 1500 jegyből 525 diák, 300 gyerek, 150 nyugdíjas, és szintén 525 felnőtt. (1 pont)

Egyenletként felírva megkapjuk ezekből, hogy:

$525\cdot 1700+300\cdot 1600+150\cdot 1700+525\cdot 2000=$ **2677500 Ft** (1 pont)

c) A filmek sorrendjét úgy tudjuk meghatározni, hogy először 3 párt alakítunk ki, mivel minden magyar film után amerikait néz Juli. Így az 5 amerikai filmből 3-at kell kiválasztani, amit $\binom{5}{3}$ féleképpen tehetünk meg. (1 pont)

Azt, hogy ezeket az amerikai filmeket párba rakjuk a 3 magyar filmmel $3!$ féleképpen tudjuk megtenni. (1 pont)

Végezetül pedig a 3 párt, a maradék 2 amerikait és a 4 másik országból származó idegen nyelvű filmet $9!$ féleképpen tudja megnézni. (1 pont)

Tehát összességében $\boldsymbol{\binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 9!}$, vagyis **21772800** féleképpen tudja Juli megnézni a filmeket.

(2 pont)

Összesen: 13 pont

2. Egy vállalat tíz dolgozója megbeszélést tart, amelyen két kérdésről is szavaznak, és csak igennel vagy nemmel lehet voksolni, a szavazás pedig titkos. Egy kérdést csak akkor tekintenek megszavazottnak, ha legalább nyolc darab igen szavazat érkezik rá. A megbeszélés során véletlenül összekeveredtek a két kérdésre adott szavazatok: összesen 14 igen és 6 nem szavazat érkezett a kérdésekre.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy az első kérdést megszavazták? (4 pont)

A megbeszélésre fejenként egy kávét rendeltek. A kiszállító futár sajnos már későn vette észre, hogy a kávézóban elfelejtették ráírni a kávékra, hogy koffeinmentesek-e. A futárnál nagyon sok kávé van, ugyanis egy fuvar alatt több rendelést is teljesít. Tapasztalatai alapján úgy becsüli, hogy egy kávé 0,15 valószínűséggel koffeinmentes.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a cég dolgozói egynél több koffeinmentes kávét kapnak a futártól? (4 pont)

A kávézó, ahonnan rendeltek, a következő stratégiát alkalmazza: minden hónap elején 10%-kal megemeli a kávé aktuális árát, majd ezt rögtön csökkenti 50 Ft-tal. Jelenleg egy kávé 1000 Ft-ba kerül.

c) Hány hónap után fogja meghaladni az 1500 Ft-ot a kávé ára? (6 pont)

***Megoldás*:**

a) Az első kérdést akkor szavazták meg, ha 8, 9 vagy 10 igennel szavaztak az adott kérdésre.

Annak a valószínűsége, hogy 8-an szavaztak igennel $\frac{\binom{14}{8}\binom{6}{2}}{\binom{20}{10}}$, annak, hogy 9-en szavaztak igennel $\frac{\binom{14}{9}\binom{6}{1}}{\binom{20}{10}}$, és végül annak, hogy 10-en $\frac{\binom{14}{10}\binom{6}{0}}{\binom{20}{10}}$ a valószínűsége. (3 pont)

Ezeket a különböző eseteket összeadva: $\frac{45045+12012+1001}{184756}=0,314$.

Vagyis annak a valószínűsége, hogy az első kérdést megszavazták **0,314**. (1 pont)

b) Komplementer eseménnyel számolva azt kell meghatározni, hogy mekkora valószínűséggel kaptak 0 vagy 1 koffeinmentes kávét, ehhez a binomiális eloszlás alkalmazandó. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 0 darab koffeinmentes kávét kaptak: $\binom{10}{0}\cdot(0,15)^0\cdot(0,85)^{10}=0,197$ (1 pont)

Annak a valószínűsége pedig, hogy 1 darabot: $\binom{10}{1}\cdot(0,15)^1\cdot(0,85)^9=0,347$ (1 pont)

Végül pedig a komplementer esemény miatt az alábbi egyenlet fogja megadni nekünk a valószínűséget: $1-0,197-0,347=\mathbf{0,456}$. (1 pont)

c) Ennek a meghatározáshoz felírjuk azt, hogy hogyan fog változni a kávé ára *n* hónap alatt, ehhez fel tudjuk írni az alábbi egyenlőtlenséget:

$\left(\left(\left((1000\cdot 1{,}1-50)\cdot 1{,}1-50\right)\cdot 1{,}1-50\right)...\right)\cdot 1{,}1-50>1500$, ahol összesen $n-1$ darab zárójel szerepel a bal oldalon. (1 pont)

Ezt átalakítva megkapjuk azt, hogy: $1000\cdot 1{,}1^{n}-50\cdot\left(1{,}1^{n-1}+1{,}1^{n-2}+...+1{,}1+1\right)>1500$ (1 pont)

Vagyis a mértani sorozat összegképletének segítségével megkapjuk, hogy:

$$1000\cdot 1{,}1^{n}-50\cdot\frac{1{,}1^{n}-1}{1{,}1-1}>1500$$ (1 pont)

Ezután már csak az egyenlőtlenséget rendezzük:

$$1000\cdot 1{,}1^{n}-500\cdot 1{,}1^{n}+500>1500$$

$$500\cdot 1{,}1^{n}>1000$$

$$1{,}1^{n}>2$$

Itt a logaritmus azonosságainak köszönhetően kapjuk, hogy:

$$\lg 1{,}1^{n}>\lg 2$$ (1 pont)

$$n\cdot\lg 1{,}1>\lg 2$$

$$n>\frac{\lg 2}{\lg 1{,}1}\approx 7,27$$ (1 pont)

7,27-nél nagyobb egész számot keresünk, ami a 8 lesz, vagyis a **8. hónap után** fogja meghaladni a kávé ára az 1500 Ft-ot. (1 pont)

Összesen: 14 pont

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg\left(x^3-1\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x^2-2x+1\right)=\lg 21$ **(8 pont)**

b) $\sqrt{\left(\operatorname{ctg} x-\sin x\cdot\cos x\right)\operatorname{tg} x}=1$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) $\lg\left(x^3-1\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x^2-2x+1\right)=\lg 21$

Először ki kell kötnünk a numeruszokra, amiből kiderül, hogy az $x^3-1>0$, vagyis az $x>1$, emellett pedig az $x^2-2x+1>0$, amiből pedig az $x\neq 1$. (1 pont)

A második logaritmus numerusza egy teljes négyzet:

$\lg\left(x^3-1\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x-1\right)^2=\lg 21$ (1 pont)

A kitevő kihozható a numeruszból a logaritmus elé szorzóként:

$\lg\left(x^3-1\right)-\lg\left(x-1\right)=\lg 21$ (1 pont)

A két logaritmus különbségét egy logaritmusba írhatjuk át:

$\lg\frac{\left(x^3-1\right)}{\left(x-1\right)}=\lg 21$ (1 pont)

Ezután a logaritmus szigorú monotonitását kihasználva elhagyjuk a logaritmusokat, és a tört számlálójában lévő nevezetes azonosságot felbontjuk.

$\frac{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x-1\right)}=21$ (2 pont)

$x^2+x+1=21$

$x^2+x-20=0$ (1 pont)

Itt a másodfokú kifejezésünkből a két gyök a 4 és a -5, de a kikötésnek csak a 4 felel meg, tehát az egyetlen megoldás az $\boldsymbol{x=4}$. (1 pont)

b) $\sqrt{\left(\operatorname{ctg} x-\sin x\cdot\cos x\right)\operatorname{tg} x}=1$

Értelmezési tartomány miatt a $\operatorname{ctg} x$-et nem értelmezzük akkor, ha a $\sin x=0$, a $\operatorname{tg} x$-et pedig akkor, ha a $\cos x=0$, ezáltal azt kapjuk, hogy az $x\neq 0+\mathrm{k}\cdot\frac{\pi}{2}$, ahol $\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$. (1 pont)

Először beírjuk a $\operatorname{ctg} x$ és a $\operatorname{tg} x$ definícióit, majd elvégezzük a beszorzást:

$\sqrt{\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\sin x\cdot\cos x\right)\frac{\sin x}{\cos x}}=1$

$\sqrt{1-\sin^2 x}=1$ (1 pont)

Felhasználjuk a trigonometrikus Pitagorasz-tételt:

$\sqrt{\cos^2 x}=1$ (1 pont)

A négyzetre emelés, majd gyökvonás éppen az abszolút értékkel egyenértékű:

$\left|\cos x\right|=1$ (1 pont)

Így két lehetőség adódik:

$\cos x=\pm 1$

Ebből pedig azt kapjuk, hogy $x=0+\mathrm{k}\cdot\pi$, ahol $\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$, de ez a megoldáshalmaz nem fog nekünk jó megoldást adni a kikötés miatt, **tehát nincs megoldása a feladatnak**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

4. Egy sárkányrepülőt szeretnénk készíteni. Ennek a „szárny” része egy szimmetrikus konkáv négyszög alakú vászon, melynek két-két oldala 6 és 5 méter hosszú, a konkáv szöge pedig $220°$-os. Erre egy oldaltól oldalig érő fémrudat szeretnénk rögzíteni, amely a repülő többi részével való kapcsolatot fogja biztosítani. A repülés közben fontos a megfelelő egyensúly, így a fémrúdnak merőlegesnek kell lennie a konkáv szárny szimmetriatengelyére, továbbá úgy kell rögzíteni, hogy a szárny rúd fölé eső területe megegyezzen a rúd alá eső területtel.

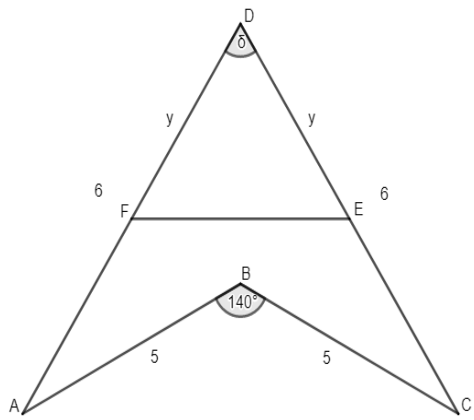
a) Hány méter hosszú ez a szükséges fémrúd? (A fémrúd vastagságától eltekintünk, továbbá tudjuk, hogy a rúd egyenese végig a négyszögön belül halad.) (8 pont)

Ádám 90 percre bérel ki egy sárkányrepülőt, amivel átlagosan 20 km/h sebességgel tud repülni. Egy 0,5 kilométer sugarú kör mentén szeretne végig repülni.

b) Hány kört tud megtenni a bérlési ideje alatt, ha már nem kezd meg egy újabb kört, amennyiben azt nem tudja időben befejezni? (3 pont)

Megoldás:

a) Először kiegészítjük a konkáv négyszöget egy háromszögre úgy, hogy A-t és C-t összekötjük egymással, így kaptunk a háromszögön belül is egy új háromszöget, ami az $ABC\triangle$ lesz, és a B csúcsánál lévő szöge $140°$-os lesz. Ebből koszinusztétel segítségével kiszámíthatjuk az AC oldal hosszát, ami $|AC| = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5^2 \cdot \cos 140°} = 9,4$ m. (1 pont)



Ezután ki tudjuk számolni az $ACD\triangle$-ben a D csúcsnál lévő szöget szintén koszinusztétellel: $9,4^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos\delta$, amiből kijön, hogy a $\delta = 103,13°$. (1 pont)

Majd kiszámoljuk az $ABC\triangle$ területét, $T_{ABC} = \dfrac{5^2 \cdot \sin 140°}{2} = 8,03$ m^2, és az $ACD\triangle$ területét is, $T_{ACD} = \dfrac{6^2 \cdot \sin 103,13°}{2} = 17,53$ m^2, amiket ha kivonunk egymásból, megkapjuk a konkáv négyszögünk területét, ami $T_{ABCD} = T_{ACD} - T_{ABC} = 17,53 - 8,03 = 9,5$ m^2. (2 pont)

Ennek a területnek a felével lesz egyenlő az $EDF\triangle$ területe: $T_{EDF} = \dfrac{T_{ABCD}}{2} = \dfrac{9,5}{2} = 4,75$ m^2, amit fel tudunk úgy írni, hogy $T_{EDF} = \dfrac{y^2 \cdot \sin 103,13°}{2} = 4,75 \text{ m}^2 \Rightarrow y = 3,12$ m. (2 pont)

Ebből pedig koszinusztétellel ki tudjuk számolni a kérdéses tartórudat, ami $|EF| = \sqrt{3,12^2 + 3,12^2 - 2 \cdot 3,12^2 \cdot \cos 103,13°} = 4,89$ m. (1 pont)

Vagyis a tartórúd hossza **4,89 méter**. (1 pont)

b) Tudjuk, hogy a kör sugara 0,5 km, emellett azt is tudjuk, hogy a kör kerülete $K = 2r\pi$, vagyis 1 kör $K = 2 \cdot 0,5 \cdot \pi = \pi$ km hosszú. (1 pont)

Majd az $s = v \cdot t$ képletet használva megkapjuk azt, hogy $s = 20 \cdot 1,5 = 30$ km. (1 pont)

Ezután megnézzük, hogy hány teljes kört megy összesen, ami pedig: $\dfrac{30}{\pi} = 9,55$, vagyis összesen **9 teljes kört tud megtenni**. (1 pont)

Összesen: 11 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Egy térképre ráhelyezünk egy koordinátarendszert, amelyen egy egység egy kilométernek felel meg. Ezen a térképen az *A* falu koordinátái $(2;2)$, a *B* falué pedig $(5;1)$. A *C* falu koordinátáit nem tudjuk pontosan leolvasni, viszont tudjuk, hogy az *A* falutól 3 km a távolsága. Ezen kívül lemérjük, hogy a *C* faluból, az *A* és *B* falu által meghatározott szakasz $60°$ -os szögben látszik.

a) Határozza meg a *C* falu koordinátáit, ha tudjuk, hogy a másik két faluhoz hasonlóan az első síknegyedben található! Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!

(9 pont)

Az *A, B* és *C* falvak még öt faluval kiegészülve minden évben közös falunapot tartanak. Ezen megrendezésre kerül az úgynevezett „pörkölt főző bajnokság”. Ennek az a különlegessége, hogy a falvak párbajokban mérkőznek meg, és minden viadalra más-más étellel kell előállnia mindenkinek, az adott párbaj győzteséről pedig egy független zsűri dönt. A bajnokság egy csoportkörrel kezdődik, amelyben két négyfős csoportba osztják be a nyolc falut, és a saját csoportjában mindenki megküzd mindenkivel. Ezek alapján mindkét csoportból a legjobb két falu jut tovább, innentől egyenes ági kiesés érvényes a versenyre (tehát a harmadik helyért már nem tartanak párbajt).

b) Hányféle étel készül összesen a bajnokságon, ha tudjuk, hogy nem készült két egyforma étel? (3 pont)

A csoportkör után a négy továbbjutott falu közül teljesen véletlenszerűen sorsolják ki a megmérkőző párokat. (Tehát előfordulhat, hogy éppen az azonos csoportból továbbjutó falvak mérkőznek meg egymás ellen.) Tudjuk, hogy az *A* falu a csoportkörben az első csoportban volt és továbbjutott. A *B* falu a második csoportba került, viszont itt még nem tartották meg a párbajokat.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az *A* és a *B* faluk főznek a döntőben egymás ellen, ha úgy számolunk, hogy minden falu egyenlően esélyes (vagyis mindenki $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer egy párbajon)? (4 pont)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy az $\overrightarrow{AB}=(3;-1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, illetve tudjuk azt is, hogy az $|AC|=3$. (1 pont)

Szinusztétel segítségével ki tudjuk számolni a *B* csúcsnál lévő szöget, ami $\frac{\sin\beta}{\sin 60^\circ}=\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\beta=55,24^\circ$, ebből pedig kijön a harmadik szög is, ami: $\alpha=180^\circ-60^\circ-\beta=64,76^\circ$. (1 pont)

Innen pedig ki tudjuk számolni szintén szinusztétellel a harmadik oldal hosszát, ami: $\frac{|BC|}{3}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Rightarrow|BC|=3,3$. (1 pont)

Ezután felírunk két köregyenletet: egy *A* középpontút 3 km, és egy *B* középpontút 3,3 km sugárral. Ezen körök metszéspontjában lesz a *C* pont, ami a harmadik falut jelöli.

$$\left.\begin{aligned}(x-2)^2+(y-2)^2&=3^2\\(x-5)^2+(y-1)^2&=3,3^2\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

$x^2+y^2-4x-4y-1=0$

$x^2+y^2-10x-2y+15{,}11=0$

Ezután az első egyenletből kivonjuk a másodikat: $6x-2y-16{,}11=0$ (1 pont)

Ebből azt kapjuk, hogy: $y=3x-8{,}055$, és ezt behelyettesítjük az első egyenletbe.

$x^2+9x^2-48{,}33x+64{,}88-4x-12x+32{,}22-1=0$

Ezt rendezve megkapjuk az alábbi másodfokú egyenletet:

$10x^2-64{,}33x+96{,}1=0$ (1 pont)

Ezt megoldva két megoldáspárt kapunk: $\begin{matrix} x_1=4{,}07 \\ x_2=2{,}36 \end{matrix}$ és $\begin{matrix} y_1=4{,}155 \\ y_2=-0{,}975 \end{matrix}$ (1 pont)

Ebből két darab koordinátát kapunk, de nekünk csak a pozitív-pozitív koordináta lesz a jó megoldásunk, mivel az van az első síknegyedben, vagyis a *C* falu koordinátái: $\boldsymbol{C(4{,}07;4{,}16)}$.

(1 pont)

b) A csoportkörökben az összes mérkőzés száma $2\cdot\binom{4}{2}$, ha mindenki mindenkivel játszik.

(1 pont)

Ezentúl az egyenes kieséses szakaszban az elődöntőben 2-t, majd a döntőben 1 mérkőzést játszanak le, tehát összesen $2\cdot\binom{4}{2}+2+1=15$ mérkőzés zajlott le. (1 pont)

Mivel mindegyik mérkőzésen mindkét fél főzött, ezért $2\cdot 15=\mathbf{30}$ darab étel készült. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy *B* falu továbbjut a csoportból $\frac{1}{2}$. (1 pont)

Annak, hogy *A* és *B* nem találkoznak az elődöntőben $\frac{2}{3}$ a valószínűsége, hiszen összesen $\binom{3}{2}=3$ féle párosítás lehetséges, amelyből 2 esetben nem egymás ellen párbajoznak. (1 pont)

És annak, hogy mindketten megnyerik az elődöntőt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ a valószínűsége. (1 pont)

Ezek független események, vagyis összeszorozva őket megkapjuk, hogy $\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}}$ **az esély arra, hogy a döntőben találkoznak**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6. Adott az alábbi két függvény:

$$f(x) = x^2 + 5x - 4$$

$$g(x) = 3x - 1$$

a) Számítsa ki az $f - 2g$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőérték helyét/helyeit!

(6 pont)

b) Határozza meg az f és g függvények grafikonjai által közbezárt terület nagyságát!

(6 pont)

c) Határozza meg a $\frac{g^2}{f}$ függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben vett határértékeit! **(4 pont)**

Megoldás:

a) Írjuk fel az így kapott függvényt: $f - 2g = x^2 + 5x - 4 - 2 \cdot (3x - 1) = x^2 - x - 2$ (1 pont)

Zérushelye ott lesz ennek a függvénynek, ahol 0-át vesz fel, tehát: $x^2 - x - 2 = 0$. (1 pont)
Ezt a másodfokú egyenletet megoldva $x_1 = -1$ és $x_1 = 2$ lesz a két gyökünk,
vagyis a $\mathbf{-1}$ és a $\mathbf{2}$ lesz a függvényünk két zérushelye. (1 pont)
A függvénynek ott lesz lokális szélsőértéke, ahol az első derivált nullát vesz fel, vagyis
$(f - 2g)'(x) = 2x - 1 = 0$. (2 pont)

Amiből $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$ lesz az egyetlen lokális szélsőérték helyünk. (1 pont)

b) A két függvény metszéspontjai között kell majd integrálnunk a közbezárt területet, tehát ott, ahol $f = g$, vagyis $3x - 1 = x^2 + 5x - 4$, amiből $0 = x^2 + 2x - 3$ másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk, hogy ez a két pont a -3 és az 1. (1 pont)

A két függvény közti terület a függvények különbségének határozott integráltjával számolható ki, ezért az alábbi integrálást kell elvégeznünk:

$$\int_{-3}^{1} 3x - 1 - (x^2 + 5x - 4)\, dx = \int_{-3}^{1} -x^2 - 2x + 3\, dx$$ (2 pont)

A Newton-Leibniz formulával számítsuk ki a határozott integrált:

$$\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^{1}$$ (1 pont)

Ebből azt kapjuk, hogy: $\left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{-27}{3} - 9 - 9 \right) = \frac{5}{3} - (-9) = \frac{32}{3}$, tehát a keresett terület **10,67 területegység**. (2 pont)

c) Írjuk fel a $\frac{g^2}{f}$ függvényt:

$$\frac{g^2}{f} = \frac{(3x-1)^2}{x^2 + 5x - 4} = \frac{9x^2 - 6x + 1}{x^2 + 5x - 4}$$ (1 pont)

Ezután emeljünk ki a számlálóból a nevező 9-szeresét:

$$\frac{9\left(x^2+5x-4\right)}{x^2+5x-4}+\frac{-51x+37}{x^2+5x-4}=9+\frac{-51x+37}{x^2+5x-4}$$ (1 pont)

Ezután már csak a $\frac{-51x+37}{x^2+5x-4}$ egyenletet kell vizsgáljuk, amiből kiderül, hogy $+\infty$-ben és $-\infty$-ben is 0-hoz fog tartani, ugyanis a számlálót és a nevezőt is leosztva x^2-tel a számláló 0-hoz, a nevező pedig 1-hez fog tartani: $\frac{\frac{-51}{x}+\frac{37}{x^2}}{1+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}$ (1 pont)

Tehát a függvény $9+0$-hoz, azaz **9-hez fog tartani mindkét végtelenben**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7. Egy ékszerész olyan gyémántokat készít, amelyek egy szabályos hatszög alapú egyenes gúlából és egy szintén szabályos hatszög alapú egyenes csonka gúlából állnak össze. A gúla alapja, illetve a csonka gúla nagyobb alapja tökéletesen egyformák és ezek illeszkednek egymáshoz. A gúla alapja egy 3 egység oldalhosszúságú szabályos hatszög, a csonka gúla másik alapjának oldalai pedig 2 egység hosszúak. A gúla palástját alkotó háromszögek szárai 5 egység hosszúak, a csonka gúla magassága éppen a gúla magasságának felével egyezik meg.

a) Számítsa ki egy ilyen gyémánt térfogatát! (8 pont)

A kereslet növekedése miatt már három gép segítségével gyártja az ékszerész a gyémántokat. Az első gép által készült gyémántok közül minden 20. selejtes, a második gép 92%-os hatékonysággal dolgozik. Az összes gyémánt 40%-át az első gép, 30%-át a második gép, a maradékot pedig a harmadik gép gyártja.

b) A harmadik gép milyen hatékonysággal dolgozik, ha tudjuk, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott selejtes gyémánt $\frac{9}{31}$ valószínűséggel a harmadik gépből származik?

(8 pont)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy a hatszög területe, ami az alapja mindkét testnek $T=6\cdot\frac{3\cdot3\cdot\sin60^\circ}{2}=23,38$.

(1 pont)

Ezentúl a gúla magasságát megkapjuk abból, hogy a palást alkotói 5 egység hosszúak, az alapja pedig a hatszög oldalával egyezik meg, mivel szabályos hatszög, tehát egy Pitagorasz háromszöget kaptunk, amiben az egyik befogó a gúla magassága, tehát:

$M=\sqrt{5^2-3^2}=4$. (2 pont)

Ezáltal a gúla térfogatát már ki is tudjuk számolni: $V_{\text{Gúla}}=\frac{T\cdot M}{3}=\frac{23,38\cdot4}{3}=31,17$. (1 pont)

A csonkagúla felső lapjának területét is megtudjuk határozni: $t=6\cdot\frac{2\cdot2\cdot\sin60^\circ}{2}=10,39$.

(1 pont)

Emellett a csonkagúla magassága fele a gúláénak, $m=\frac{4}{2}=2$, így a csonkagúla térfogata:

$$V_{\text{Csonkagúla}}=\frac{m\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)}{3}=\frac{2\cdot\left(23,38+\sqrt{23,38\cdot10,39}+10,39\right)}{3}=32,9$$ (2 pont)

Tehát a két test térfogata összesen: $V_{\text{Gyémánt}}=32,9+31,17=$ **64,07 egységköb**. (1 pont)

b) Az első gép $\frac{1}{20}=0,05$ része selejtes, és $0,4$ részét gyártja az összesnek. (1 pont)

A második gép $0,08$ része selejtes, és $0,3$ részét gyártja az összesnek. (1 pont)

A harmadik gép pedig x része selejtes, és $0,3$ részét gyártja az összesnek. (1 pont)

Ezáltal felírhatjuk azt az egyenletet, hogy:

$$\frac{9}{31}=\frac{0,3x}{0,4\cdot0,05+0,3\cdot0,08+0,3x}=\frac{0,3x}{0,044+0,3x}$$ (3 pont)

$0,01277+0,0871x=0,3x$

$x=0,06$ (1 pont)

Tehát a harmadik gép $1-x=0,94$, vagyis **94%-os hatékonysággal dolgozik**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8. Egy társaság új hobbija a szabadulószoba, ezért az utóbbi héten három szobát is meglátogattak. Mindegyik esetben 60 perc állt rendelkezésre a kijutásra, és nagy örömükre mindig sikerült időben kiszabadulniuk. A három kijutási idő (percben mérve) egy számtani sorozatot alkot. A legrövidebb időből 36 percet, a középsőből 5 percet kivonva, a leghosszabbhoz pedig 170 percet hozzáadva egy olyan mértani sorozathoz jutunk, melynek kvóciense megegyezik az eredeti számtani sorozat differenciájával.

a) Hány perc volt a társaság legrövidebb kijutási ideje? (9 pont)

Az egyik szobában a kijutást biztosító utolsó kulcs egy érdekes díszdobozba volt elrejtve. Ez egy olyan félgömb alakú doboz, amelyben még benne van egy kipárnázott, kocka alakú kisebb doboz úgy, hogy a kocka egyik lapja a félgömb síkmetszetére esik, a szemben lévő négy csúcsa pedig belülről érinti a gömböt.

b) Mekkora ennek a díszdoboznak a felszíne a kocka oldalának függvényében, ha ez a félgömb zárt, vagyis a kocka kívülről nem látható? (7 pont)

Megoldás:

a) Jelölje a számtani sorozatot: a_1, a_1+d, és a_1+2d.

Írjuk fel a mértani sorozatot is a számtani sorozat függvényében, vagyis: a_1-36, a_1+d-5, és $a_1+2d+170$.

Ezenkívül tudjuk még, hogy a számtani sorozat differenciája megegyezik a mértani sorozat kvóciensével, vagyis felírhatjuk azt, hogy $q=d$. (1 pont)

Emiatt felírhatjuk az alábbi egyenleteket: $d=\dfrac{a_1+d-5}{a_1-36}=\dfrac{a_1+2d+170}{a_1+d-5}$. (2 pont)

Ezeket rendezve a következő két egyenletet kaptuk: $\begin{array}{l} 0=a_1d-a_1-37d+5 \\ 0=a_1d-a_1+d^2-7d-170 \end{array}$ (1 pont)

A második egyenletből az elsőt kivonva az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:
$0=d^2+30d-175$ (2 pont)

A két megoldása az egyenletnek a -35 és az 5, de ezekből csak az 5 fog jó megoldást adni nekünk. (1 pont)

Így a $d=5$-öt behelyettesítve az első egyenletbe megkapjuk azt, hogy:
$0=5\cdot a_1-a_1-185+5$,

vagyis $a_1=45$. (1 pont)

Tehát a legrövidebb kijutási ideje a csapatnak **45 perc** volt. (1 pont)

b) Legyen a kocka oldala *x*, a félgömb sugara pedig *r*.

A kocka alsó lapjának középpontja egybeesik a félgömb középpontjával, (1 pont)
ezért a kocka alsó lapjának átlójának a fele, a kocka magassága, és a kocka alsó lapjának középpontja és a felső csúcsok egyike által meghatározott szakasz pont egy Pitagorasz háromszöget határoznak meg, amelyben utóbbi szakasz pont a félgömb sugarával egyenlő. (1 pont)

A kocka alsó lapjának a félátlóját szintén egy Pitagorasz-tétellel kapjuk meg: $\sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$. (1 pont)

Így megkapjuk az alábbi összefüggést: $r=\sqrt{x^2+2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}x^2}$ (1 pont)

Ezután felírjuk a félgömb felszínének képletét, ami: $A_{\text{Félgömb}}=\dfrac{4\cdot r^2\cdot\pi}{2}+r^2\cdot\pi=3\cdot r^2\cdot\pi$ (2 pont)

Ezt követően behelyettesítjük a már korábban kapott összefüggésünket:

$A_{\text{Félgömb}} = 3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2} x^2} \right)^2 \cdot \pi = \boldsymbol{\frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot \pi}$ **a felszín,** a kocka oldalának függvényében. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9. Tekintsük a következő állítást: „Minden pozitív egész *n* esetén a $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ kifejezés osztható 17-tel.”

a) Fogalmazza meg az állítás tagadását! (2 pont)

b) Döntse el, hogy igaz-e az állítás! Válaszát indokolja! (8 pont)

A 63 462 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

c) Így hány ötjegyű számot kapunk, és ezek közül hány darab lesz négyzetszám?

(6 pont)

Megoldás:

a) Létezik olyan pozitív egész *n*, hogy a $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ kifejezés nem osztható 17-tel. (2 pont)

b) Bizonyítsuk be teljes indukcióval.

Nézzük meg $n=1$-re:

$3\cdot 5^{3}+2^{4}=391\Rightarrow$ osztható 17-tel, tehát $n=1$-re igaz. (1 pont)

Tegyük fel, hogy igaz $n=k$-ra, ez az indukciós feltevés:

$17\,|\,3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}$ (2 pont)

Nézzük meg $n=k+1$-re.

$17\,|\,3\cdot 5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}$ (1 pont)

$17\,|\,25\cdot 3\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}$ (1 pont)

$17\,|\,17\cdot 3\cdot 5^{2k+1}+8\cdot\left(3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}\right)$ (1 pont)

Ebből látszik, hogy az állítás igaz, mivel az összeg első felében van egy 17-es szorzó, vagyis biztosan osztható 17-tel, az összeadás másik felében pedig az indukciós feltevésben lévő kifejezés 8-szorosa található, ami szintén **osztható 17-tel, tehát az állítás igaz**. (2 pont)

c) Az 5 számot $5!$ féleképpen írhatjuk le, (1 pont)

viszont egy szám kétszer szerepel benne, ezért összesen $\frac{5!}{2!}=\mathbf{60}$ féleképpen tudunk ötjegyű számokat készíteni. (2 pont)

Ezen számok mind oszthatóak 3-mal, mivel a számjegyeik összege osztható 3-mal, viszont a kapott számok közül egyik se lesz osztható 9-cel, mivel a számjegyeik összege nem osztható 9-cel. (2 pont)

Ezért **egy négyzetszám sem lesz a számok között**, mivel a prímtényezős felbontásukban a 3-as szám hatványa páratlan kitevőn lenne. (1 pont)

Összesen: 16 pont

A szerezhető maximális pontszám: 115 pont