PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. február 10.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

2024. február 10.

Időtartam: 240 perc

Kérjük, nyomtatott nagybetűkkel töltse ki!

Név	
E-mail cím	
SG-s szombati tanítás teremszáma	
Pontszám	

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, n!, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2+3x-1+\dfrac{1}{x^2+3x-3}=4$

b) $\log_2\left(x^2-1\right)-\log_2\left(-2x+x^2-3\right)=1$

a)	**5 pont**	
b)	**8 pont**	
Ö.:	**13 pont**	

2. Máté, András, Bálint, Miklós és Zsombor nagyon szeretik a vizes sportokat. A közös sportolásra rendeltek fürdőnadrágokat, fejenként egyet (mindegyiket külön csomagban szállítják ki). A csomagokat összekészítő dolgozó gyakran kapkod, és a tapasztalatok alapján 0,18 valószínűséggel fürdőnadrág helyett fecskenadrágot csomagol.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt fiú egynél több fecske úszónadrágot kap kézhez?

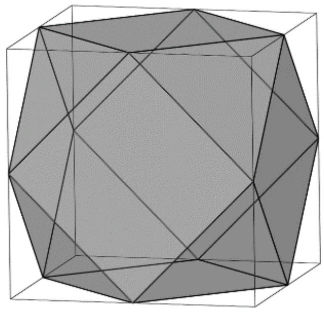
A srácok az egyik hétvégén el is mennek úszni egy uszodába, és kibérelnek egy kinti és egy benti úszópályát. Mivel még mindenkinek dolga van aznap, ezért mindegyikőjük csak az egyik pályán fog úszni.

b) Hányféleképpen tudnak egymás után sorban úszni a két pályán összesen, ha egyszerre csak egy ember használ egy pályát?

Az 5 fiú ezután szavazást tart arról, hogy milyen sportot űzhetnének még együtt. A focit, a röplabdát és a kosárlabdát vetik fel ötletként. Minden sportágnak kijelölnek egy kalapot, ahova minden fiú egy cetlin leadja a szavazatát, hogy támogatja vagy ellenzi az adott ötletet. A szavazás során véletlenül összekeverednek a 3 kalapba tett szavazatok, csak azt tudjuk, hogy összesen 10 „támogatom” és 5 „ellenzem” szavazat érkezett.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy a focit megszavazták, ha egy sport csak akkor lesz megszavazott, ha legalább 4 „támogatom” szavazatot kapott?

a)	**4 pont**	
b)	**4 pont**	
c)	**5 pont**	
Ö.:	**13 pont**	



3. A matematikában a félig szabályos testeket Arkhimédészi testeknek nevezzük. Egy ilyen Arkhimédészi testnek nevezzük a kuboktaédert is, amelynek lapjait 8 szabályos háromszög és 6 négyzet alkotja. (A test az ábrán látható.)

a) Hány élből áll és hány csúcsa van egy ilyen testnek?

b) Ha a kuboktaéder minden éle 1 egység hosszúságú, akkor hány négyzetegység a felszíne és hány köbegység a térfogata egy ilyen testnek?

a)	**3 pont**	
b)	**9 pont**	
Ö.:	**12 pont**	

4. Zsófi és Kinga élnek-halnak a videójátékokért, minden este hosszú órákat játszanak együtt. Előző alkalommal azonban Zsófi fejhallgatója sajnos tönkrement, így másnap Kingával elindultak a kedvenc műszaki árucikkeket forgalmazó boltjukba, hogy vegyenek egy újat. A videójátékok mellett a lányok másik nagy szenvedélye a statisztika, így a boltban feljegyzést készítettek arról, hogy az egyes fejhallgatók milyen áron kaphatóak. Ezen értékek az alábbi táblázatban láthatók:

Ár (ezer Ft)	**10**	**30**	**50**	**60**	**70**	**90**
Darabszám	2	2	1	2	3	1

a) Segítsen a lányoknak kiszámolni a fejhallgatók árának az átlagtól vett átlagos abszolút eltérését, és adja meg a felső kvartilist!

b) Készítsen az adatokból egy 5 pontos sodrófa diagramot (doboz ábrát) az ehhez szükséges mutatók megadásának segítségével!

Mivel a lányok már úgyis a boltban voltak, gondolták körülnéznek a billentyűzetes soron is. Kingának szerettek volna választani egy új billentyűzetet, amihez 3 szempontot vettek figyelembe. Fontos volt, hogy olcsó, valamint, hogy vezeték nélküli és mechanikus legyen. 2 csak az olcsó, 4 pedig csak a mechanikus kritériumot teljesítette. Olyanból, ami csak vezeték nélküli, illetve vezeték nélküli és mechanikus is, de drága, összesen 4 volt. Olyat, ami vezeték nélküli és emellett még egy vagy két kritériumnak is megfelel, 4-et láttak. 8 olyan volt, ami a kritériumokból csak 2-nek felelt meg. A csak vezeték nélküli, illetve vezeték nélküli és olcsó is, de nem mechanikus kategóriákban összesen 1 volt. Valamint olyat, ami olcsó és ezen kívül egy vagy két kritériumnak tesz eleget, összesen 6-ot találtak.

c) Hány olyan billentyűzetet láttak, amely mindhárom feltételnek megfelelt?

a)	**3 pont**	
b)	**3 pont**	
c)	**7 pont**	
Ö.:	**13 pont**	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

5. Adott az alábbi két függvény:

$$f(x) = 3x + 3$$

$$g(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Számítsa ki a $2g - 4f$ függvény zérushelyeit és lokális szélsőérték helyét/helyeit!

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonjai által közrefogott zárt síkidom területét!

c) Határozza meg az $\frac{f^2}{g}$ függvény $+\infty$-ben és $-\infty$-ben vett határértékeit!

a)	**6 pont**	
b)	**7 pont**	
c)	**3 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

6. Áron és Marci, két jó barát, mindketten New Yorkban tanulnak. Délutánonként rendszeresen találkoznak egymással kedvenc helyükön, a Central Parkban. Meg is beszélték, hogy másnap délután 4-kor végeznek órán, így össze tudnak futni fél 5 és 5 között valamikor a szokásos helyükön.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy annak, aki előbb érkezik, nem kell 5 percnél többet várnia a másikra?

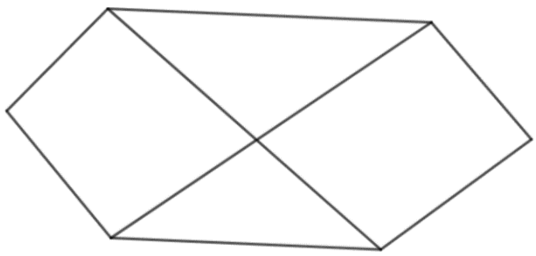
Miközben beszélgetnek, Áron megemlíti, hogy a tegnapi Vállalati pénzügyek teszten nagyon rosszul teljesített. 5 igaz-hamis kérdésre kellett válaszolni, ha valaki mind az 5 kérdésre jól válaszolt, akkor 3 pontot kapott, ha csak 4-re, akkor 2-t, viszont, ha valaki csak 3 vagy kevesebb kérdésre tudta a választ, arra nem járt pont. Áron sajnos csak 0,45 valószínűséggel tudta az egyes kérdésekre a választ.

b) Segítsen Áronnak kiszámolni annak a valószínűségét, hogy 2, valamint, hogy 3 pontot kapott a teszten, illetve adja meg a pontjainak várható értékét!

Áron a parkban lévő faházban szokott édességet vásárolni, ahol 7 fajta nyalókát és valahányféle pillecukrot árulnak. Áron minden héten vagy 4 különböző féle nyalókát vagy 2 eltérő fajta pillecukrot vesz. Kiszámolta, hogyha az összes lehetőséget ki akarja próbálni, ahogyan be tud bevásárolni az édességekből, akkor ehhez pontosan 41 hét szükséges.

c) Hányféle pillecukrot árulnak a faházban?

Miután elköszöntek egymástól, és elindultak hazafelé, Marci kicsit eltévedt. Szerencsére megtalálta az alábbi térképet, amelyen a parkban lévő összes út fel van tüntetve. A térképet látván elgondolkodott, hogy végig tudna-e menni a parkban található összes úton úgy, hogy mindegyiken csak egyszer jár. Pár perc tűnődés után arra jutott, hogy igen.



d) Igaza volt Marcinak ebben a kérdésben? Válaszát indokolja!

a)	**5 pont**	
b)	**3 pont**	
c)	**6 pont**	
d)	**2 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

7. Hannáék a számrendszereket tanulták az utóbbi hetekben matek órán. Az egyik óra után a tanár felírt egy házi feladatot a táblára, de Hanna sajnos csengetés után vette észre, és futtában csak a következőt tudta leírni a füzetébe:

$$s_a + g_a = 132_a$$

Otthon észrevette és gondolta, ír a tanárnak egy emailt, hogy megkérdezze, milyen számok állnak az s és a g helyén. A tanár a következőt válaszolta neki:

„Ha úgy tekintünk először s-re és g-re, mint tízes számrendszerbeli számokra, akkor a g számot úgy kapjuk, hogy az s kétjegyű számban a számjegyeket felcseréljük. A számjegyek összege 7. Ha az s számot megszorozzuk a második számjegyének felével, és ehhez hozzáadjuk az első számjegyének 4-szeresét, majd az egészet leosztjuk 3-mal, akkor a második számjegyének $\frac{13}{2}$-szeresét kapjuk, úgy, hogy a második számjegyének a fele lesz a maradék.”

a) A tanár a levelében csak az s és g helyére beírt számokhoz adott Hannának útmutatást. Határozza meg ezt a két számot, majd azt, hogy milyen alapú számrendszerben teljesülhet az eredeti egyenlőség!

Hanna tovább olvasta a tanára írását, és látta, hogy két szorgalmi feladatot is csatolt hozzá, amelyek így szólnak:

b) Keresse meg az összes olyan prímszámot, amelyek felírhatók két prímszám összegeként és különbségeként is!

Egy növekvő mértani sorozat első három tagjának szorzata 729. Az első taghoz egyet hozzáadva, valamint a harmadik tagból 13-at kivonva egy számtani sorozat első három elemét kapjuk.

c) Adja meg a mértani és a számtani sorozat első három tagját!

a)	**6 pont**	
b)	**4 pont**	
c)	**6 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

8. Tekintsük a következő állítást az alábbi számhalmazon $\left(x \in \mathbb{R}, \text{ és } \sin x \neq 0\right)$: „Minden pozitív egész n esetén a $\left(\cos 2^0 x\right)\left(\cos 2^1 x\right)...\left(\cos 2^{n-1} x\right)$ kifejezés értéke egyenlő lesz $\frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$-szel."

a) Fogalmazza meg az állítás tagadását!

b) Bizonyítsa a fenti állítást teljes indukcióval!

Adott az $x^2 + x + p = 0$ paraméteres egyenlet.

c) Adja meg a p paraméter értékét, ha tudjuk az egyenlet két gyökéről, hogy: $2x_1 + 3x_2 = 1$, és $x_1 \leq x_2$!

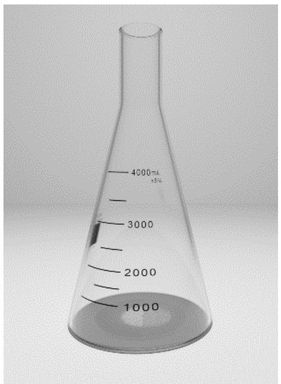
a)	**2 pont**	
b)	**8 pont**	
c)	**6 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

9.

a) Adott a síkon az $A(1;2)$ pont, ami az *O* középpontú, 5 egység sugarú kör körvonalán található. Tudjuk, hogy az *O* középponton áthalad az $y=-\frac{4}{3}x+\frac{35}{3}$ egyenesünk. Határozza meg a *B* és *C* pontokon átmenő egyenes egyenletét, ha tudjuk, hogy az *A*, *B* és *C* pontok egy szabályos háromszöget alkotnak, és ezek a pontok a kör körvonalán helyezkednek el.

b) Szabi és Robi a kémia nagy szerelmesei, a minap is a szertárban tartottak leltárt az ott fellelhető készletről. Az egyik szekrényben találtak egy Erlenmeyer-lombikot, amelyben hidrogén-peroxid állt. Fel akarták jegyezni, hogy milyen mennyiségben tartalmazza a vegyületet, viszont sajnos minden felirat le volt kopva a lombik oldaláról. Annyit viszont tudtak, hogy a lombik kinézete megfelel annak, ha az $f(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } 0\le x<4\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \text{ ha } 4\le x\le 8\end{cases}$ függvényt megforgatjuk az *x* tengely körül, egy olyan koordináta-rendszerben, ahol egy egység a valóságban 2 cm-nek felel meg.



Hány deciliter hidrogén-peroxidot tartalmaz a lombik, ha tudjuk, hogy a magasságának 87,5%-áig van töltve?

a)	**9 pont**	
b)	**7 pont**	
Ö.:	**16 pont**	

	feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	13		**51**	
	2.	13			
	3.	12			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← Nem választott feladat			
Az írásbeli próbavizsga pontszáma				**115**	

javító tanár