PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2023. február 18.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI – ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

2023. február 18.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS

– KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1. Egyszerűsítse az alábbi kifejezést, ahol $a \neq \pm b$!

$$\frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)}{a^2 - b^2}$$

(2 pont)

Megoldás:

A nevezőt szorzattá alakítjuk, így egyszerűsíteni tudunk.

$$\frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)}{(a-b) \cdot (a+b)}$$ (1 pont)

Az egyszerűsített eredmény: $a - b$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

2. Adottak a következő számok: 378 és 735. Adja meg az alábbi számok…

a) prímtényezős felbontását,

b) legnagyobb közös osztóját,

c) legkisebb közös többszörösét! **(4 pont)**

Megoldás:

a) A 378 prímtényezős felbontása: $\mathbf{2 \cdot 3^3 \cdot 7}$. (1 pont)
A 735 prímtényezős felbontása: $\mathbf{3 \cdot 5 \cdot 7^2}$. (1 pont)
b) LNKO: $3 \cdot 7 = \mathbf{21}$. (1 pont)
c) LKKT: $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = \mathbf{13230}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

3. Fogalmazza meg az alábbi állítás tagadását:

„Minden nap megyek edzeni.”

(2 pont)

Megoldás:

Az állítás tagadása: **Van olyan nap, amikor nem megyek edzeni.** (2 pont)

A 2 pont kettéválasztható a következőképpen:

- „Minden nap” tagadása, hogy „van olyan nap”. (1 pont)
- A „megyek” edzeni tagadása, hogy „nem megyek” edzeni. (1 pont)

Összesen: 2 pont

Alternatív megoldás:

Az állítás tagadása: **Nem minden nap megyek edzeni.** (2 pont)

Összesen: 2 pont

4. Egy számtani sorozat második tagja 31, hatodik tagja 7. Adja meg a sorozat differenciáját!

(3 pont)

Megoldás:

A második tagból a hatodik tag úgy írható fel, hogy: $a_2 + 4d = a_6$. (1 pont)

Az egyenletbe behelyettesítve: $31 + 4d = 7$. (1 pont)

Innen megkapjuk a sorozat differenciáját, amely $\boldsymbol{d = -6}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

Alternatív megoldás:

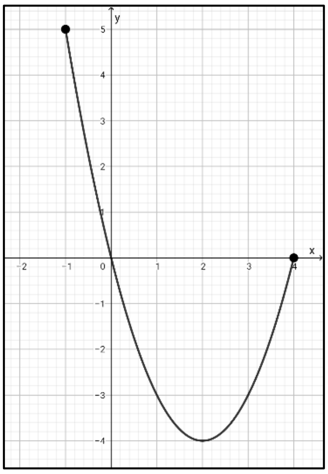
Az adatok alapján az alábbi egyenletrendszer írható fel: $\left.\begin{matrix} a_1 + d = 31 \\ a_1 + 5d = 7 \end{matrix}\right\}$. (1 pont)

Az első egyenletből a másodikat kivonva megkapjuk, hogy: $24 = -4d$. (1 pont)

Innen a számtani sorozat differenciája: $\boldsymbol{d = -6}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

5. Az alábbi ábrán a $[-1;4]$ intervallumon értelmezett $f(x) = (x-2)^2 - 4$ függvény grafikonja látható. Adja meg a függvény értékkészletét!



(2 pont)

Megoldás:

Az ábráról leolvasva: $\boldsymbol{-4 \le y \le 5}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

Alternatív megoldás:

Az intervallum határait az egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy a maximum értéke 5.

A minimum pont x koordinátáját az ábráról leolvasva, majd a függvény hozzárendelési szabályába behelyettesítve megkapjuk, hogy a minimum értéke -4.

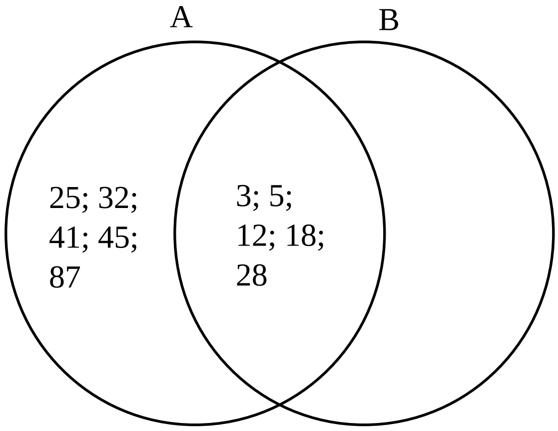
Így a függvény értékkészlete: $\boldsymbol{-4 \le y \le 5}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

6. Adott az $A \cap B = \{3;5;12;18;28\}$ és az $A \setminus B = \{25;32;41;45;87\}$. Adja meg az A halmaz elemeit felsorolással! (2 pont)

Megoldás:

Adatok alapján felrajzolható az alábbi halmazábra:



Innen: $\boldsymbol{A = \{3;5;12;18;25;28;32;41;45;87\}}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

7. Egy hotelben felmérést készítettek. Az alábbi táblázat 90 szoba mérési eredményét tartalmazza az ágyak száma szerint:

Ágyak száma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Szobák darabszáma	**28**	**12**	**12**	**23**	**15**

Határozza meg az összes szoba ágyainak számtani közepét (átlagát), móduszát és mediánját! (3 pont)

Megoldás:

a) Számtani közép (átlag): $\frac{28\cdot1+12\cdot2+12\cdot3+23\cdot4+15\cdot5}{90}=\frac{255}{90}=\frac{17}{6}\approx \mathbf{2{,}8\dot{3}}$. (1 pont)

b) A leggyakrabban előforduló elem, tehát a **módusz** ebben az esetben az **1.** (1 pont)

c) A **medián** úgy számolható ki, hogy az ágyak számait növekvő vagy csökkenő sorrendbe állítjuk, és megvizsgáljuk melyik a középső elem. Páros elemszám esetén a két középső elem számtani közepét kell venni, tehát:

$\frac{3+3}{2}=\mathbf{3.}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

8. Adott két pont $P(8;-2)$ és $Q(-1;17)$ a koordinátasíkon. Írja fel a két ponton átmenő egyenes egyik irányvektorát! (2 pont)

Megoldás:

A két ponton átmenő egyenes irányvektorát úgy kaphatjuk meg, hogy a P pont koordinátáiból páronként kivonjuk a Q pont koordinátáit: $\underline{v}=(8-(-1);\ (-2)-17)$. (1 pont)

Innen: $\boldsymbol{\overrightarrow{QP}=\underline{v}=(9;\ -19)}$. (1 pont)

Vagy:

A két ponton átmenő egyenes irányvektorát úgy kaphatjuk meg, hogy a Q pont koordinátáiból páronként kivonjuk a P pont koordinátáit: $\underline{v} = \left((-1) - 8;\, 17 - (-2) \right)$. (1 pont)

Innen: $\boldsymbol{\overrightarrow{PQ} = \underline{v} = (-9;\, 19)}$. (1 pont)

Amennyiben a tanuló bármely irányvektort megadja, jár a 2 pont.

Összesen: 2 pont

Alternatív megoldás:

Amennyiben a tanuló bármely, az előzőekkel párhuzamos vektort adott meg, jár neki a 2 pont.

Összesen: 2 pont

9. Hány különböző négyjegyű szám képezhető az 1; 2; 2; 8 számkártyák felhasználásával, ha egy kártyát csak egyszer használhatunk fel? (3 pont)

Megoldás:

Négy szám lehetséges sorrendje: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. (1 pont)

Az így kapott számot az elemek ismétlődésével kell osztani, ami 2!. (1 pont)

A végeredmény így: **12.** (1 pont)

Összesen: 3 pont

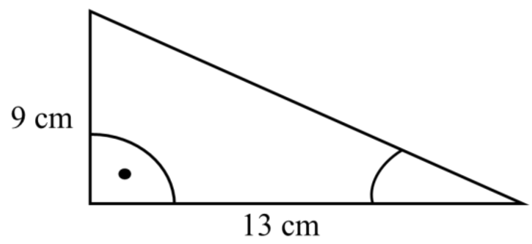
10. Egy derékszögű háromszög befogói 9 cm és 13 cm hosszúak. Adja meg a legkisebb oldallal szemben lévő szög nagyságát! Válaszát három tizedesjegyre kerekítse! (2 pont)

Megoldás:

Derékszögű háromszögben tangens függvénnyel:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{13}$ (1 pont)

Innen: $\boldsymbol{\alpha = 34{,}695°}$ (1 pont)



Összesen: 2 pont

11. Egy dobókockát kétszer feldobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott összeg 8? Válaszát 2 tizedesjegyre kerekítse!

(3 pont)

Megoldás:

A lehetséges számpárosok: $(2;6),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2)$. A kedvező esetek száma így 5.

(1 pont)

Az összes eset száma: $6 \cdot 6 = 36$. (1 pont)

A keresett valószínűség így: $\boldsymbol{\frac{5}{36} \approx 0{,}14}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

12. Endre most fele annyi idős, mint édesanyja. Három év múlva édesanyja 53 éves lesz. Hány éves most Endre? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

	most	3 év múlva
Anya	x	$x + 3$
Endre	$0{,}5x$	$0{,}5x + 3$

A feladat szövege és a táblázat alapján az alábbi egyenletet írhatjuk fel: $x+3=53$. Vagyis $x=50$, tehát Endre anyukája most 50 éves. (1 pont)

Ebből Endre mostani életkora: $\frac{50}{2}=\mathbf{25}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\mathbf{2^x \cdot 5 + 4^x \cdot 7 = 488}$ **(6 pont)**

b) $\mathbf{|x-2| = 2x+5}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) A hatványazonosságok alapján: $4^x = \left(2^x\right)^2$.

Innen az új egyenlet: $2^x \cdot 5 + \left(2^x\right)^2 \cdot 7 = 488$. (1 pont)

Új ismeretlen bevezetésével: $2^x = a$.

Ebből következik: $7a^2 + 5a - 488 = 0$. (1 pont)

A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével a két gyök: $a_1 = 8$ és $a_2 = -\frac{61}{7} = -8,71$.

(1 pont)

Az exponenciális függvény értékkészlete miatt a_2 nem megoldás. (1 pont)

Visszahelyettesítéssel: $2^x = 8 = 2^3$.

Innen az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $\mathbf{x = 3}$. (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára való hivatkozással. (1 pont)

b) Ha $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{ ha } x \geq 2 \\ -x+2, \text{ ha } x < 2 \end{cases}$ (1 pont)

Az egyenletben belső kikötést kell tennünk: $2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2,5$. (1 pont)

Az egyenletet 2 intervallumban vizsgáljuk.

<u>I.eset</u>: ha $-2,5 \leq x < 2$.

$-x+2 = 2x+5 \Rightarrow \mathbf{x = -1}$. (1 pont)

A kapott x érték ennek az intervallumnak eleme, így ez megoldás. (1 pont)

<u>II.eset</u>: ha $x \geq 2$.

$x-2 = 2x+5 \Rightarrow x = -7$ (1 pont)

A kapott x érték ennek az intervallumnak nem eleme. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 13 pont

14. Egy kutatás eredményeként a szakértők az alábbi függvényt fedezték fel az emberi haj növekedési ütemének megállapításához: $h=\sqrt{t+4}+7\cdot\lg 10^{t}$, ahol t az eltelt hónapok számát, h pedig a haj hosszának növekedését mutatja milliméterben.

a) Adja meg a haj hosszának növekedését egy év alatt! (4 pont)

A kutatók egy megbeszélés keretei között vitatták meg az előbbi felismerésüket. Találkozásukkor kézfogással üdvözölték egymást, így összesen 55 kézfogás történt (ahol mindenki mindenkivel kezet fogott).

b) Hány kutató jelent meg a megbeszélésen? (4 pont)

Kiválasztottunk 5 kutatót, akiknek ismeretségét egy gráfon szeretnénk ismertetni.

c) Rajzoljon fel egy lehetséges egyszerű gráfot, amely az ismeretségüket szemléltetheti, illetve amelyről tudjuk, hogy csúcsainak száma 5, éleinek száma 7, továbbá van olyan csúcsa, melynek fokszáma 3! (3 pont)

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy 1 év egyenlő 12 hónappal, így $t=12$. (1 pont)

A függvénybe behelyettesítve: $h=\sqrt{12+4}+7\cdot\lg 10^{12}$. (1 pont)

A logaritmus azonosságait felhasználva és a gyökvonást elvégezve: $h=4+12\cdot7\cdot1$. (1 pont)

A haj hosszának növekedése egy év alatt: $\mathbf{h=88}$ **mm**. (1 pont)

b) A kézfogások száma megegyezik a teljes gráf éleinek számával, így annak képletét felhasználva:

$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=55$. (1 pont)

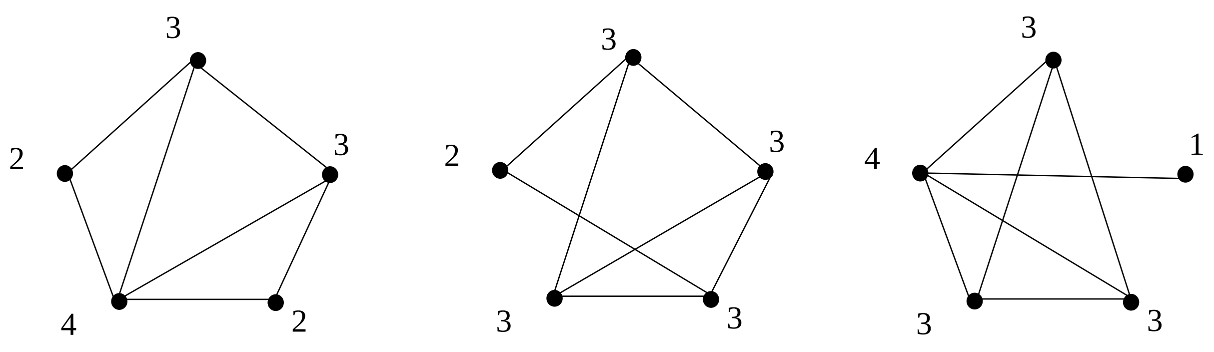
Az egyenletet rendezve az alábbi másodfokú kifejezést kapjuk: $n^2-n-110=0$. (1 pont)

A másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével a két gyök: $n_1=11$ és $n_2=-10$.

(1 pont)

Mivel a kutatók száma nem lehet negatív, ezért **11** kutató jelent meg az eseményen. (1 pont)

c) Lehetséges gráfok:



Amennyiben a tanuló bármely gráfot felrajzolja a fentiek közül, 3 pontot kaphat. (3 pont)

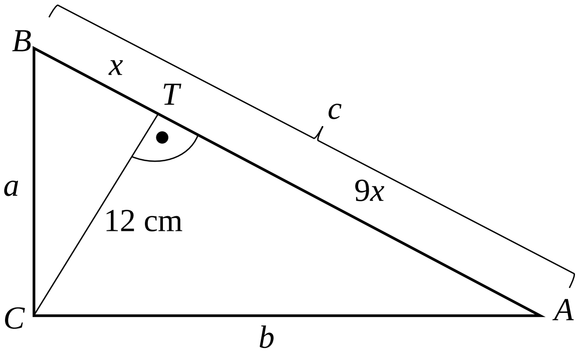
Összesen: 11 pont

15.

a) **Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság 12 cm A magasság az átfogót $1:9$ arányban osztja. Adja meg a háromszög oldalainak a hosszát! (6 pont)**

b) **Az ábrán látható *ABCD* húrtrapéz alapjai 12 cm és 28 cm Határozza meg a trapéz területét, ha a kiegészítő *DCE* háromszög területe 18 cm^2! (6 pont)**

Megoldás:



a) Az *ABC* háromszögben magasságtétel felhasználásával: $12^2 = x \cdot 9x$. (1 pont)

Ezt megoldva: $x_1 = 4;\ x_2 = -4$.

Innen x értéke csak 4 lehet, mert a háromszög oldala szigorúan pozitív. (1 pont)

Átfogó hossza így: $9 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = \mathbf{40\ cm}$.

(1 pont)

A b oldal kiszámításához az *ATC* háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk: $b^2 = 12^2 + 36^2$.

Ekkor $\boldsymbol{b = 37{,}95\ \mathrm{cm}}$. (1 pont)

Az a befogó hosszának kiszámításához az *ABC* háromszögben ismét Pitagorasz-tételt használunk: $a^2 + 37{,}95^2 = 40^2$.

Innen $\boldsymbol{a = 12{,}65\ \mathrm{cm}}$. (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az *ABC* háromszögben magasságtétel felhasználásával: $12^2 = x \cdot 9x$. (1 pont)

Ezt megoldva: $x_1 = 4;\ x_2 = -4$. Innen x értéke csak 4 lehet, mert a háromszög oldala szigorúan pozitív. (1 pont)

Átfogó hossza így: $9 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = \mathbf{40\ cm}$. (1 pont)

A b oldal kiszámításához a befogó tételt alkalmazzuk: $b = \sqrt{9x \cdot 10x} = \sqrt{36 \cdot 40}$.

Ekkor $\boldsymbol{b = 37{,}95\ \mathrm{cm}}$. (1 pont)

Az a oldal kiszámításához a befogó tételt alkalmazzuk: $a = \sqrt{x \cdot 10x} = \sqrt{4 \cdot 40}$.

Innen $\boldsymbol{a = 12{,}65\ \mathrm{cm}}$. (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

b) *DEC* háromszög területe: $18\ \text{cm}^2$, így a területképletébe helyettesítve: $\frac{12\cdot m}{2}=18$.

(1 pont)

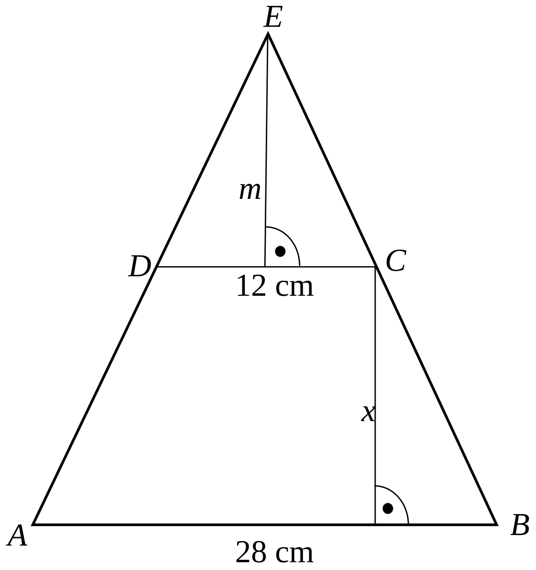
Ebből adódik, hogy: $m=3$ cm. (1 pont)

A *DEC* háromszög hasonló *AEB* háromszöghöz, mert szögeik páronként megegyeznek. Ebből következik, hogy oldalaik aránya is páronként megegyezik. (1 pont)

Innen: $\frac{12}{28}=\frac{m}{m+x}$. (1 pont)

Az elején kiszámított *m* értéket behelyettesítve az egyenletbe és rendezve kapjuk, hogy $x=4$ cm.

(1 pont)



Ekkor a trapéz területe: $\frac{28+12}{2}\cdot 4 = \mathbf{80\ cm^2}$. (1 pont)

<u>Alternatív megoldás</u>:

DEC háromszög területe: $18\ \text{cm}^2$, így a területképletbe helyettesítve: $\frac{12\cdot m}{2}=18$. (1 pont)

Ebből adódik, hogy: $m=3$ cm. (1 pont)

A *DEC* háromszög hasonló *AEB* háromszöghöz, mert szögeik páronként megegyeznek. Ebből következik, hogy a területeik aránya a hasonlóság négyzete. (1 pont)

A hasonlóság aránya $\frac{28}{12}$, ennek négyzete $\frac{49}{9}$. (1 pont)

Így a nagy háromszög területe: $18\cdot\frac{49}{9}=98\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Ebből a kis háromszög területét kivonva kapjuk, hogy a trapéz területe **80 cm²**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16. Miksa az elmúlt ünnepek után összeszámolta az összes zsebpénzét, és így 50 000 forintot kapott eredményül. Elhatározta, hogy ezt január elsején a bankba helyezi évi 7%-os kamatra. Legnagyobb álma, hogy elutazhasson a francia Alpokba síelni, amelynek ára 130 000 forint.

a) Hány év múlva teljesítheti az Miksa álmát? (6 pont)

Egy válogatott csapat 3 hétre egy francia síparadicsomba megy felkészülni a sívilágbajnokságra. A felkészülés 3 egyhetes blokkra bontható. Az első hét első napján a csapat 40 kilométert tett meg, majd a következő 6 napban mindig 10%-kal többet az előző naphoz képest. A második héten már 45 kilométerrel kezdtek, majd mindennap 2 kilométerrel többet síeltek vasárnapig. Végül a világbajnokság előtti héten pihenésképpen kicsit kevesebb időt fordítottak a síelésre, így hétfőn csupán 34 kilométert tettek meg a sportolók, majd mindennap 6%-kal többet.

b) Összesen hány kilométert síeltek, amennyiben az utolsó vasárnap már csak pihentek? Válaszát két tizedesjegyre kerekítse! (11 pont)

Megoldás:

a) A szövegből az alábbi egyenlőtlenség írható fel: $50000 \cdot 1{,}07^x \geq 130000$, ahol x az eltelt évek számát jelöli. (1 pont)

Az egyenlőtlenséget egyszerűsítve: $1{,}07^x \geq 2{,}6$. (1 pont)

10-es alapú logaritmus szigorú monoton növekedése miatt: $\lg 1{,}07^x \geq \lg 2{,}6$. (1 pont)

A logaritmus azonosságait felhasználva: $x \cdot \lg 1{,}07 \geq \lg 2{,}6$. (1 pont)

Innen: $x \geq \dfrac{\lg 2{,}6}{\lg 1{,}07} \approx 14{,}12$. (1 pont)

Miksa a **15. évben** már teljesítheti álmát. (1 pont)
Amennyiben a tanuló egyenletként oldotta meg a feladatot, majd a végén hivatkozott arra, hogy az eltelt évek száma csak egész lehet és felfelé kerekített, akkor jár neki a teljes pontszám.

b) Az első héten megtett kilométerek száma egy mértani sorozatot alkot, ahol:

$a_1 = 40$

$q = 1{,}1$ (2 pont)

$n = 7$

A mértani sorozat összegképletébe behelyettesítve:

$S_7 = 40 \cdot \dfrac{1{,}1^7 - 1}{1{,}1 - 1} \approx 379{,}4868$ km. (1 pont)

A második héten megtett kilométerek száma egy számtani sorozatot alkot, ahol:

$b_1 = 45$

$d = 2$

$n = 7$ (2 pont)

$b_7 = b_1 + 6d = 45 + 6 \cdot 2 = 57$

A számtani sorozat összegképletébe behelyettesítve:

$S_7 = 7 \cdot \dfrac{45 + 57}{2} = 357$ km. (1 pont)

Végül az utolsó héten megtett kilométerek száma ismét egy mértani sorozatot alkot, ahol:

$c_1 = 34$

$q = 1{,}06$ (2 pont)

Mivel a sportolók vasárnap már pihentek, ezért: $n = 6$.
A mértani sorozat összegképletébe behelyettesítve:

$S_6 = 34 \cdot \frac{1,06^6 - 1}{1,06 - 1} \approx 237,1608 \text{ km}$. (1 pont)

A három hét alatt megtett kilométerek száma egyenlő az előbb kiszámolt kilométerek összegével, ami két tizedesjegyre kerekítve **973,65 km**. (2 pont)

A helyes végeredményre adható 2 pont szétbontható a következőképpen:

Összeadás... (1 pont)

Helyes kerekítés... (1 pont)

Összesen: 17 pont

17. Egy vállalat megnyitójára a cég egy bonbonkészítő üzlettől egyedi tervezésű csokis-mézes édességeket rendelt. Ennek formája egy négyzet alapú egyenes csonkagúlából és a kisebbik alapján fekvő félgömbből áll, amely tökéletesen illeszkedik a fedőlapra. A bonbonokat fehércsokiba mártják, úgy, hogy az az összes lehetséges oldalát befedje.

a) Mekkora felületet kell befednie a csokoládénak, ha tudjuk, hogy a csonkagúla nagyobbik alapjának éle 16 mm, illetve a csonkagúla oldallapjának magassága 7 mm. Ezenkívül a félgömb térfogata 148 mm^3. Válaszát két tizedesjegyre kerekítse! **(8 pont)**

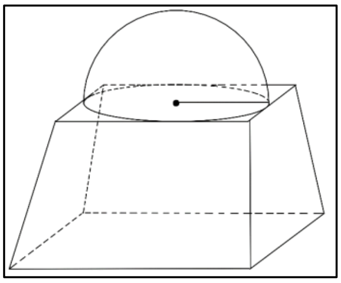
A készítés során a bonbonok 3%-ára fehércsoki helyett étcsoki került, amely nem felel meg a rendelés követelményeinek.

b) Az összes elkészült édességből véletlenszerűen 8-cat kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 lesz étcsokis, ha a csokikat visszatesszük a választás után? **(6 pont)**

Egy minőségellenőr gyakran ellenőrzi, hogy a gyár megfelel-e a biztonsági előírásoknak. Vasárnap a gyár értesítést kapott, hogy a következő héten a minőségellenőr szúrópróbaszerűen két napon is a gyárba látogat.

c) Hányféleképpen választhatja ki az ellenőr ezt a két hétköznapot? **(3 pont)**

Megoldás:

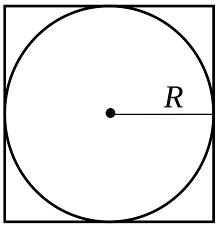


a) A gömb sugara kiszámítható a gömb térfogatképletének segítségével.

Vagyis: $V_{gömb} = \frac{\frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot R^3}{2} = 148 \text{ mm}^3$, innen $R = 4,1343 \text{ mm}$. (1 pont)

Ezt felhasználva kiszámítható a félgömb felszíne: $A_{félgömb} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{2} = 107,3949 \text{ mm}^2$. (1 pont)

Szükségünk van még a nagyobbik alaplap területére, amely egy négyzet. Ennek területe: $T_{alaplap} = 16 \cdot 16 = 256 \text{ mm}^2$. (1 pont)



A csonkagúla palástját 4 egybevágó szimmetrikus trapéz alkotja, ahol kisebbik alapjának hossza kétszerese a félgömb sugarának. (1 pont)

A trapéz területképletének segítségével felírható: $T_{palást} = 4 \cdot \frac{16 + 8,2686}{2} \cdot 7 = 339,7604 \text{ mm}^2$. (1 pont)

A kisebbik alaplapon fekvő félgömb, ahogy az ábrán is látható, úgy illeszkedik az alaplapra, hogy maradnak olyan területek, amelyet a félgömb nem fed, így a csokoládéborításnak rá kell kerülnie. Ez megkapható úgy, hogy a kisebbik alaplap területéből kivonjuk a félgömb alapjának területét: $T_{lemaradó\ részek} = T_{négyzet} - T_{kör} = (2R)^2 - R^2\pi = 68,3697 - 53,6975 = 14,6722\ \text{mm}^2$. (2 pont)

A bonbon felületét úgy kapjuk, ha az előbb kiszámított területeket összeadjuk:

$A = A_{fél\,gömb} + T_{alaplap} + T_{palást} + T_{lemaradó\ részek}$ = **717,8275 mm².** (1 pont)

b) Az alábbi feladatrész megoldásához a binomiális eloszlás képletét használjuk. (Amennyiben ez a tanuló megoldásából látható, akkor jár a pont.) (1 pont)

A rossz és a jó valószínűsége: $P_{jó} = 0,97$, $P_{rossz} = 0,03$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy egy se lesz rossz: $0,97^8$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 1 lesz rossz: $\binom{8}{1} \cdot 0,03^1 \cdot 0,97^7$. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy 2 lesz rossz: $\binom{8}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^6$. (1 pont)

Ha ezeket összeadjuk, akkor megkapjuk, hogy mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb kettő bonbon étcsokis: $P_{legfeljebb\ kettő} = \mathbf{0,9987}$. (1 pont)

c) Öt munkanapból kettőt az ismétlés nélküli kombináció segítségével választhatunk ki: $\binom{5}{2}$ = **10**.

(2 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 17 pont

18. Egy 30 fős osztályt megkérdeztek, hogy mely tésztákat szokták fogyasztani az iskola közelében lévő Penne nevű étteremben, ahol 3 íz közül választhatnak a vendégek: Mustáros-Csirkés, Bazsalikomos-Paradicsomos és Vadgombás. Az osztályban 9 tanuló szereti a Mustáros-Csirkéset, 19 a Bazsalikomos-Paradicsomosat és 16 a Vadgombásat. Hárman még nem jártak ezen a helyen. Egy diák a Vadgombásat és a Mustáros-Csirkéset is szereti, de a Bazsalikomos-Paradicsomosat nem, hárman fogyasztják szívesen a Mustáros-Csirkéset és a Bazsalikomos-Paradicsomosat, de a Vadgombásat nem, és szintén három ember szereti a Bazsalikomos-Paradicsomosat és a Vadgombásat, de a Mustáros-Csirkéset nem. Öt olyan tanuló van, aki mindhármat ugyanolyan szívesen rendeli.

a) Készítsen halmazábrát az osztály preferenciáiról! (4 pont)

Másik kedvelt éttermük a Pasta alla Nonna. A Pasta alla Nonnában leggyakrabban málna,- és mangószörpöt fogyasztanak a vendégek. A két italt nagy kannákban készíti a vendéglő, ahol a málnás 0,8 kg, a mangós 0,6 kg tömény szirupot tartalmaz. Ha kísérletezni akarnak az ízekkel és a két szörpöt összeöntik, akkor egy harmadik töménységű 10 kg-os készítményt kapnak.

b) Mekkora volt az italok tömege egyenként, ha a szirup százaléka a málnás szörpben 10 százalékponttal több, mint a mangósban? (6 pont)

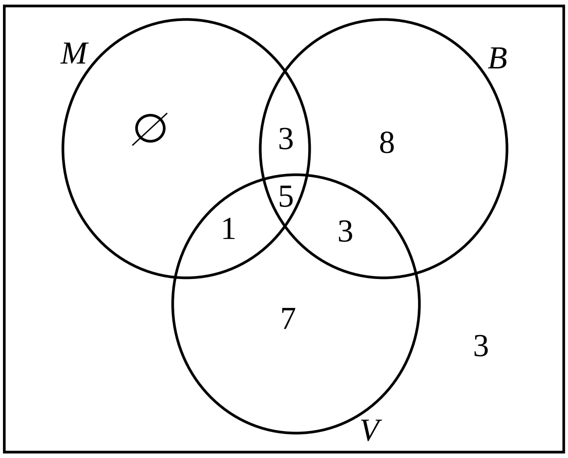
A kedvenc éttermünk terjeszkedni kezd Budapesten. A már két meglévő üzletét egy harmadikkal szeretné kiegészíteni, ahol a desszertek lennének a középpontban. A helyszín keresésénél az a legfőbb szempont, hogy az étterem a már meglévő helyektől egyenlő távolságra helyezkedjen el. Ha a két már meglévő éttermet egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolnánk, akkor az *A* étterem koordinátái $(3;2)$, a *B* étterem koordinátái pedig $(7;7)$ lennének.

c) Adja meg az új *C* étterem lehetséges elhelyezkedését, ha annak *x* koordinátája 9!

(7 pont)

Megoldás:

a)



Helyes ábra felrajzolása. (4 pont)

b) A feladat szövegéből felírható a következő egyenlet, ahol az x a málnás ital tömegét jelöli:

$\frac{0,8}{x} = \frac{0,6}{10-x} + 0,1.$ (2 pont)

A nevezőkkel felszorozva, majd az egyenletet rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $0,1x^2 - 2,4x + 8 = 0$. (1 pont)

A másodfokú megoldóképletet felhasználva a két gyök: $x_1 = 20$ és $x_2 = 4$. (1 pont)

Mivel a kettő tömegének összege 10 kg, így az egyik ital tömege nem lehet 20 kg. (1 pont)

Tehát a málnaszörp tömege 4 kg, a mangószörp tömege pedig 6 kg. (1 pont)

c) Mivel C egyenlő távolságra van A-tól és B-től, így a pontok egy egyenlőszárú háromszöget alkotnak, így a harmadik étterem koordinátái rajta lesznek A és B pont felezőmerőlegesén. (1 pont)

Amennyiben a tanuló ezt nem írja le, de a számításaiból egyértelműen kiderül, jár a pont.

A felezőpont kiszámítása: $F\left(\frac{3+7}{2};\frac{2+7}{2}\right) = F(5;4,5)$. (1 pont)

A felezőmerőleges kiszámításához meghatározzuk AB vektort: $\overrightarrow{AB}(7-3;\ 7-2) = \overrightarrow{AB}(4;\ 5)$.

(1 pont)

A felezőmerőleges egyenlete: $4x + 5y = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4,5 \Rightarrow 4x + 5y = 42,5$. (1 pont)

Az egyenletbe $x = 9$-et behelyettesítve, és az egyenletet rendezve kapjuk az új étterem y koordinátáját: $y = 1,3$. (2 pont)

Az új étterem koordinátái így: $\boldsymbol{C(9;1,3)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34 pont