

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

2023. február 18.

Időtartam: 240 perc

Kérjük, nyomtatott nagybetűkkel töltsé ki!

Név	
E-mail cím	
SG-s szombati tanítás teremszáma	
Pontszám	

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ



TEGYÜNK EGYÜTT AZ OKTATÁSÉRT!

Győzd meg a szüleid, hogy ajánlják fel adójuk 1%-át a Studium Generale Alapítványnak!

Adószámunk: 19669814-1-43

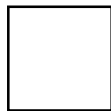
A felajánlásoknak köszönhetően diákok ezreinek segítünk felkészülni az érettségire minden évben!



További információ a honlapunkon:
www.studiumgenerale.hu/ado-1

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.



4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Az alábbi táblázat 2022. október hónap napjainak átlagos napi hőmérsékletét mutatja meg (október elsejétől október 31-éig, 31 napot vizsgálva).

Hőmérséklet (C°)	8	11	12	13	14	15	16	17
Gyakoriság	1	3	6	4	8	7	1	1

- a) A táblázat alapján számítsa ki az októberi hónap átlagos hőmérsékletét, és annak szórását!

Andris az adatok alaposabb megvizsgálása során észrevette, hogy minden nap a hónap napjai során vagy ugyanannyi volt a hőmérséklet, mint az azt megelőző nap, vagy egyre hidegebb volt a napok múlásával.

- b) Határozza meg, hogy mennyi volt az átlag hőmérséklet azokon a napokon, amikor a dátum prímszám volt, és akkor, amikor a dátum négyzetszám volt!

Egy növekvő számtani sorozat első három tagjának összege 75. Az első tagjából egyet kivonva, a másodikhoz hármat hozzáadva, míg a harmadik tagot négygyel megszorozva, illetve ahhoz tizenhatot adva egy mértani sorozat első három tagját kapjuk.

- c) Mi a mértani sorozat első három tagja?

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	13 pont	

2. Máté megfigyelte, hogy az iskolája mellett található kisboltban mindig el van helyezve a kirakatban 7 különböző ízű tábla csokoládé, méghozzá tejsokis, étcsokis, mogyorós, epres, mentás, narancsos és karamellás. Mind a 7 íz külön stócbokba rendezve fekszik a polcon.
- a) Máté négy különböző ízű tábla csokoládét szeretne vásárolni. Az elsőt édesanyjának, a másodikat édesapjának, a harmadikat a kishúgának, míg a negyediket önmagának veszi. Mekkora a valószínűsége, hogy a húga nem gyümölcsös ízű csokit fog kapni, ha Máté véletlenszerűen választja ki a négy különböző ízű csokoládét?
- b) Ha Máté öt tábla csokoládét szeretne vásárolni, hányféleképpen teheti ezt meg, ha mindenképpen szeretné, hogy legyen köztük legalább egy karamellás, viszont semelyik ízből sem szeretne több, mint két darabot vásárolni?

Karácsony közeledtével n db új ízű tábla csokoládé jelent meg a kirakatban.

- c) Hány darab új ízű tábla csokoládét lehet kapni a kisboltban, ha Máté így 1287-féleképpen tud öt darab különböző tábla csokoládét megvásárolni?

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Zsombor, a cukrász, feleségének születésnapja közeledtével szeretne volna öt meglepni három különböző tortával. Az első tortának az alapja egy szabályos háromszög, a második tortának az alapja egy szabályos ötszög, a harmadik alapja pedig egy kör.

- a) Mekkora oldalhosszú, illetve, a harmadik torta esetén, sugarú lesz az alapja az egyes tortáknak, ha mindegyik torta alapjának területe 500 cm^2 ?

A torták centiméterben mért magassága rendre egy számtani sorozat első három tagja. A sorozat differenciája 4. Tudjuk ezen felül, hogy az első tag a legkisebb prímszám.

- b) Rendre mekkora a torták térfogata?

A cukrászatban az alábbi ízesítésekkel tudják a vásárlók megvásárolni a tortákat: csokis, gyümölcsös és tejszínhabos. Tudjuk, hogy összesen 50 tortát készítettek el a mai nap során (mindegyik torta legalább egy ízesítésű). Ebből 20 csokis, 26 gyümölcsös, és 17 tejszínhabos. 5 csokis-gyümölcsöset, és 7 gyümölcsös-tejszínhabosat készítettek. Csupán két darab olyat készítettek, ami csokis-gyümölcsös-tejszínhabos lett.

- c) Hány tortát készítettek, ami csokis-tejszínhabos ízesítésű lett?

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $36 \cdot 4^{2x-1} + 11 \cdot 12^x - 16 \cdot 3^{2x+1} = 0$

b) $4 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = -1$

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Miklós, a fűszerkereskedő úgy döntött, hogy saját mozsarat fog tervezni és árulni. A tervezet szerint minden egyes mozsár egyetlen, homogén, természetes gránittömbből készülne, amelyekből először egy 5 cm oldalhosszú, szabályos kilencszög alapú hasábot vágnak ki, melynek magassága 8 cm. Ezt követően egy üreget fúrnak bele az egyik alapon keresztül úgy, hogy a mozsár túloldalán, tehát az alján maradjon 1 cm magas, tömör gránit. Az üreg alakját egy 12 cm átmérőjű félgömb, illetve az arra pontosan helyezkedő, szintén 12 cm átmérőjű egyenes henger adja.

- a) Mekkora tömege lesz egy ilyen mozsárnak, ha a gránit sűrűsége $2750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$? Válaszát három tizedesjegyre kerekítse!

Adott az alábbi állítás: Minden pozitív egész n esetén a $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ kifejezés osztható 133-mal.

- b) Döntse el, hogy igaz-e az állítás! Válaszát indokolja!

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

6. A Fővám téri Fürdő Szekció Zrt. egy logót szeretne készíttetni az egyik vízi kampányukhoz. Elképzelésük szerint a logó egy sárga, illetve egy kék színű, egymást metsző körlapokból állna, amelyek koordináta-rendszerbeli egyenlete ilyen sorrendben a következő: $x^2 - 12x + y^2 + 6y + 20 = 0$, illetve $x^2 - 22x + y^2 - 8y + 88 = 0$.

- a) Számítsa ki a metszetük által képzett zöld terület nagyságát területegységben! Válaszát két tizedesjegyre kerekítse!

Adott az $a_n = \frac{14n-8}{8n+3}$ természetes számok halmazán értelmezett számsorozat.

- b) Hányadik tagtól kezdődően lesz a tagok és a sorozat határértékének különbsége kisebb, mint $\frac{1}{1000}$?

a)	10 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

¹ A zöld terület nagysága, a színkeverés miatt, a kék és sárga körlapok átfedésének területével lesz egyenlő.

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

7. Bálint egy rendezvényszervező cégnél dolgozik, és azt a megbízást kapták, hogy egy sportnapot kell megszervezniük különböző programokkal. Az egyik program a sok közül egy kosárlabda-bajnokság, ahol 5 csapat vesz részt, és mindegyik csapat mindegyik másik csapattal játszik. A meccsek végkimenetelére a bajnokság kezdetéig fogadni is lehet, mindegyik esetben 3 opcióra: *A* csapat nyer, döntetlen, *B* csapat nyer. Csak olyan szelvényt lehet kitölteni, ahol az összes meccsre kell fogadni.

a) Mekkora eséllyel lesz hibátlan szelvényünk, ha 1000 különböző szelvényt töltünk ki?

A rendezvényen 9 résztvevővel tollaslabda-bajnokság is zajlik, ahol mindenki megmérkőzik egymással. Eddig ennyi meccset játszottak le a résztvevők: 5; 4; 4; 4; 3; 3; 2; 1; 0.

b) Hány meccset kell még játszaniuk ahhoz, hogy mindenki játsszon mindenkivel?

A sportnapon lehetőség van újászkodni is. Összesen 10 nyílvesző áll rendelkezésre, és egy alkalomhoz 6 nyílveszőt biztosítottak a szervezők (miután valaki kilőtte mind a hatot, összeszedik azt a hatot, és visszateszik a többi közé).

c) Mekkora valószínűséggel kaphatta egymás után 3 ember is ugyanazt a 6 nyilat a 10-ből?

A sportnap zárórendezvénye egy futóverseny volt, amin szülő-gyermek párosok indulhattak. (Egyéni futóverseny, azonban csak párosával lehetett jelentkezni.) Tudjuk, hogy az első 8 helyezett pont 4 ilyen páros volt, akik mind egymás után értek be páronként.

d) Hányféleképpen érhetek célba a versenyzők, ha összesen 10 szülő-gyermek páros indult a versenyen, viszont 2 gyerek és 2 szülő sosem ért be egymást követően a célba?

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

8. Adott az alábbi két függvény:

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 12$$

$$g(x) = -4x^2 - 2x + 12$$

- a) Határozza meg az f és g függvények grafikonjai által közbezárt terület nagyságát!
- b) Számítsa ki a $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8,5x^2 + 66x - 69$ függvény lokális szélsőérték helyét/helyeit, és az inflexiós pontját!

Egy forró nyári napon Dorina elment a piacra görögdinnyéket vásárolni kedvenc eladójához. Mikor megérkezett az eladó annyira megörült neki, hogy felajánlotta, hogy a görögdinnyéket most ő állja, de egy csavarral. Annyi darab dinnyét ad Dorinának, amekkora lesz a $\frac{9n+56}{n+5}$ tört értéke. Dorina ismeri ezt a trükköt, ezért elhatározza, hogy csak egész dinnyéket visz haza, hogy ne romoljanak meg a nagy hőségben.

- c) Mekkora lehet az n értéke ebben az esetben?

a)	7 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

9.

- a) Bizonyítsa be, hogy a szabályos sokszögek közül csak a háromszöggel, négyszöggel és hatszöggel fedhető le egyrétűen és hézagmentesen egy sík!
- b) Deltoid alakú papírsárkányt készítünk, melynek két átlója 6 és 4 méter hosszú. A rövidebbik átló két különböző szög alatt látszik a négyszög két csúcsából, melyek közül az egyik 110° . A reptetéshez szükséges madzagot a deltoid azon belső pontjához fogjuk kötni, mely a síkidom minden oldalától egyenlő távolságra van. Mekkora ez a távolság, illetve mekkora szög alatt látszódnak ebből a pontból a deltoid oldalai? Válaszát két tizedesjegyre kerekítse!

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

	feladat sorszáma	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	13		51	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli próbavizsga pontszáma				115	

javító tanár