PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. február 18.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Javítási útmutató

2023. február 18.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

1. Az alábbi táblázat 2022. október hónap napjainak átlagos napi hőmérsékletét mutatja meg (október elsejétől október 31-éig, 31 napot vizsgálva).

Hőmérséklet (C°)	8	11	12	13	14	15	16	17
Gyakoriság	1	3	6	4	8	7	1	1

a) A táblázat alapján számítsa ki az októberi hónap átlagos hőmérsékletét, és annak szórását! (3 pont)

Andris az adatok alaposabb megvizsgálása során észrevette, hogy minden nap a hónap napjai során vagy ugyanannyi volt a hőmérséklet, mint az azt megelőző nap, vagy egyre hidegebb volt a napok múlásával.

b) Határozza meg, hogy mennyi volt az átlag hőmérséklet azokon a napokon, amikor a dátum prímszám volt, és akkor, amikor a dátum négyzetszám volt! (4 pont)

Egy növekvő számtani sorozat első három tagjának összege 75. Az első tagjából egyet kivonva, a másodikhoz hármat hozzáadva, míg a harmadik tagot néggyel megszorozva, illetve ahhoz tizenhatot adva egy mértani sorozat első három tagját kapjuk.

c) Mi a mértani sorozat első három tagja? (6 pont)

***Megoldás*:**

a) A 31 nap átlaghőmérséklete: $\frac{8+3\cdot 11+6\cdot 12+4\cdot 13+8\cdot 14+7\cdot 15+16+17}{31}=\frac{415}{31}\approx \mathbf{13,39\ C^\circ}$

(1 pont)

Ebből a szórás:

$$\sqrt{\frac{(8-13,39)^2+3(11-13,39)^2+6(12-13,39)^2+...+(16-13,39)^2+(17-13,39)^2}{31}}=\mathbf{1,7902}$$

(2 pont)

b) Az alábbi számok 31-ig a prímszámok: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31. (1 pont)

Ezekhez a napokhoz rendre felírható az átlaghőmérséklet: $\frac{16+3\cdot 15+3\cdot 14+13+12+11+8}{11}=\frac{147}{11}\approx \mathbf{13,36\ C^\circ}$ (1 pont)

Az alábbi számok 31-ig a négyzetszámok: 1; 4; 9; 16; 25. (1 pont)

Ezekhez a napokhoz rendre felírható az átlaghőmérséklet: $\frac{17+2\cdot 15+14+12}{5}=\frac{73}{5}=\mathbf{14,6\ C^\circ}$

(1 pont)

c) A számtani sorozatot a szöveg alapján fel tudjuk úgy írni, hogy $a_2-d;\ a_2;\ a_2+d$, ami jelen esetben a $25-d$; 25; $25+d$ -vel lesz egyenlő, hiszen az összegük 75. (1 pont)

Ebből a mértani sorozat tagjai: $24-d$; 28; $116+4d$ (1 pont)

Majd felírható ebből az az összefüggés a mértani sorozat definícióját kihasználva, hogy $(116+4d)(24-d)=28^2$ (1 pont)

Ezt rendezve az kapjuk, hogy d lehetséges értékei $\begin{matrix} d_1=20 \\ d_2=-25 \end{matrix}$ (2 pont)

Viszont mivel ez egy növekvő sorozat, ezért csak a $d1$ lesz a jó megoldásunk, tehát a mértani sorozatunk első 3 tagja: **4; 28; 196.** (1 pont)

Összesen: 13 pont

2. Máté megfigyelte, hogy az iskolája mellett található kisboltban mindig el van helyezve a kirakatban 7 különböző ízű tábla csokoládé, méghozzá tejcsokis, étcsokis, mogyorós, epres, mentás, narancsos és karamellás. Mind a 7 íz külön stócokba rendezve fekszik a polcon.

a) Máté négy különböző ízű tábla csokoládét szeretne vásárolni. Az elsőt édesanyjának, a másodikat édesapjának, a harmadikat a kishúgának, míg a negyediket önmagának veszi. Mekkora a valószínűsége, hogy a húga nem gyümölcsös ízű csokit fog kapni, ha Máté véletlenszerűen választja ki a négy különböző ízű csokoládét? (5 pont)

b) Ha Máté öt tábla csokoládét szeretne vásárolni sorrendtől függetlenül, hányféleképpen teheti ezt meg, ha mindenképpen szeretné, hogy legyen köztük legalább egy karamellás, viszont semelyik ízből sem szeretne több, mint két darabot vásárolni?

(4 pont)

Karácsony közeledtével *n* db új ízű tábla csokoládé jelent meg a kirakatban.

c) Hány darab új ízű tábla csokoládét lehet kapni a kisboltban, ha Máté így 1287-féleképpen tud öt darab különböző tábla csokoládét megvásárolni? (4 pont)

Megoldás:

a) Összesen $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$ féleképpen tudja megvenni a 4 db csokoládét. (1 pont)

Mivel a kishúga csokija a szüleié után kerül kiválasztásra, így először azt kell megvizsgálni, hogy ők milyen ízű csokoládét kaptak, a kedvező esetek kiszámításához.

Első esetben mindkét szülő gyümölcsös csokit kap. Ez $2\cdot 5\cdot 4=40$-féleképpen történhet meg. (1 pont)

Második esetben csak az egyikük kaphat gyümölcsöset, míg a húga nem, Máté viszont kaphat. Ezen esetek száma $\binom{2}{1}\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 4=320$. (1 pont)

Harmadik esetben se a szülők, se a kishúga nem kaphat gyümölcsös csokit, ez pedig $5\cdot 4\cdot 3\cdot 4=240$ eset. (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P=\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\frac{40+320+240}{840}=\frac{600}{840}=\mathbf{\frac{5}{7}\approx 0,7143}$. (1 pont)

b) Mivel az ötből egy mindenképpen karamellás, így elegendő a maradék négy csoki lehetséges eseteit megvizsgálni.

Első esetben még pontosan egy db karamellás lesz a 4 csoki között. Ha a maradék 3 mind különböző, akkor ez $\binom{6}{3}=20$, míg bármiféle további duplikáció a maradék 3 csoki között $\binom{6}{1}\binom{5}{1}=30$ esetet képez, ahol számít, mely csokiból vásárolunk két darabot. (1 pont)

Második esetben nem lesz karamellás a vizsgált, maradék 4 csoki között. Ha mind a 4 különböző, az $\binom{6}{4}=15$ esetet képez. Ha a 4 között pontosan egy duplikáció van, az $\binom{6}{1}\binom{5}{2}=60$-féleképpen, míg 2 db duplikáció $\binom{6}{2}=15$ különböző féleképpen történhet meg. (2 pont)

Összeadva az eseteket megkapjuk, hogy **140**-féleképpen veheti meg az 5 db csokit. (1 pont)

c) Legyen $7+n=k$ $\left(n,k\in\mathbb{N}\right)$.

Tudjuk, hogy $\binom{k}{5}=1287$. A kombináció képletetét felhasználva felírhatjuk, hogy $\frac{k!}{(k-5)!\cdot 5!}=1287$, melyet átrendezve a $\left(k-4\right)\left(k-3\right)\left(k-2\right)\left(k-1\right)\left(k\right)=154440$ egyenletet kapjuk. (1 pont)

Mivel a bal oldalt 5 szomszédos szám szorzata áll, így prímtényezőire bontjuk a 154440-et.

$154440=2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11\cdot 13$. (1 pont)

Ezen tényezőkből csak a $9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ szorzat állítható elő, mely 5 szomszédos természetes számból áll. (1 pont)

Ez alapján $k=13$, tehát $\boldsymbol{n=6}$ **új ízű csokoládé érkezett karácsonykor.** (1 pont)

Összesen: 13 pont

3. Zsombor, a cukrász, feleségének születésnapja közeledtével szerette volna őt meglepni három különböző tortával. Az első tortának az alapja egy szabályos háromszög, a második tortának az alapja egy szabályos ötszög, a harmadik alapja pedig egy kör.

a) Mekkora oldalhosszú, illetve, a harmadik torta esetén, sugarú, lesz az alapja az egyes tortáknak, ha mindegyik torta alapjának területe 500 cm2? (5 pont)

A torták centiméterben mért magassága rendre egy számtani sorozat első három tagja. A sorozat differenciája 4. Tudjuk ezen felül, hogy az első tag a legkisebb prímszám.

b) Rendre mekkora a torták térfogata? (3 pont)

A cukrászatban az alábbi ízesítésekkel tudják a vásárlók megvásárolni a tortákat: csokis, gyümölcsös és tejszínhabos. Tudjuk, hogy összesen 50 tortát készítettek el a mai nap során (mindegyik torta legalább egy ízesítésű). Ebből 20 csokis, 26 gyümölcsös, és 17 tejszínhabos. 5 csokis-gyümölcsöset, és 7 gyümölcsös-tejszínhabosat készítettek. Csupán két darab olyat készítettek, ami csokis-gyümölcsös-tejszínhabos lett.

c) Hány tortát készítettek, ami csokis-tejszínhabos ízesítésű lett? (4 pont)

Megoldás:

a) A háromszög esetén felírható az oldalára az, hogy: $\frac{a^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 500\ \text{cm}^2$, amit rendezve azt kapjuk, hogy: $\boldsymbol{a = 33,98\ \text{cm}^2}$ (2 pont)

Az ötszöget felbontjuk 5 egybevágó háromszögre, aminek egyik csúcsa az ötszög középpontja lesz, és az azzal szemközti oldal, pedig az ötszög egyik oldala lesz.

Ezekre a háromszögekre felírhatjuk azt, hogy $\frac{a^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} = 100\ \text{cm}^2$, mivel ez az ötöde lesz az egész ötszögnek. Ezt rendezve azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{a = 14,50\ \text{cm}^2}$ (1 pont)

Ezután pedig szinusz tételt alkalmazva megkaphatjuk a kérdéses ötszög oldalát: $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{x}{a}$, ahol x jelöli az ötszög oldalát. Ezt rendezve megkapjuk, hogy: $\boldsymbol{x = 17,05\ \text{cm}^2}$

(1 pont)

A kör esetén pedig felírható a sugárra az, hogy: $r^2 \cdot \pi = 500\ \text{cm}^2$, ezt rendezve megkapjuk, hogy $\boldsymbol{r = 12,62\ \text{cm}^2}$ (1 pont)

b) Az adott adatok alapján felírható a következő számtani sor: 2; 6; 10 (1 pont)

Ezután a $V = T_a \cdot m$ képletbe behelyettesítve megkapjuk azt, hogy a torták térfogatai: $V_{háromszög} = 500 \cdot 2 = \mathbf{1000\ cm^3}$, $V_{ötszög} = 500 \cdot 6 = \mathbf{3000\ cm^3}$, $V_{kör} = 500 \cdot 10 = \mathbf{5000\ cm^3}$ (2 pont)

c) Ábrázoljuk Venn-diagrammon. (1 pont)

A szita formula alapján felírható az alábbi összefüggés: $20 + 26 + 17 - 5 - 7 - x + 2 = 50$ (2 pont)

Ezt rendezve megkapjuk, hogy összesen $\boldsymbol{x = 3}$ darab csokis-tejszínhabos készült. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\mathbf{36\cdot 4^{2x-1}+11\cdot 12^{x}-16\cdot 3^{2x+1}=0}$ **(6 pont)**

b) $\mathbf{4\sin x\cdot\cos x+2\cos^{2}x=-1}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) A hatványkitevőket szorzótényezőkké alakítva, illetve 3^{2x}-nel leosztva, az alábbi egyenleteket tudjuk felírni:

$$9\cdot 4^{2x}+11\cdot 12^{x}-48\cdot 3^{2x}=0$$

$$9\cdot\frac{4^{2x}}{3^{2x}}+11\cdot\frac{4^{x}\cdot 3^{x}}{3^{2x}}-48=0$$ (1 pont)

Hatványazonosságok alapján:

$$9\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}+11\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-48=0$$ (1 pont)

A másodfokú megoldóképletet alkalmazva a következő két gyököt kapjuk:

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=\frac{16}{9}$ vagy $\left(\frac{4}{3}\right)^{x}=-3.$ (1 pont)

Az utóbbi nem lehetséges, hiszen egy pozitív szám minden hatványa pozitív. (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $\mathbf{x=2}$. (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára való hivatkozással. (1 pont)

b) Alkalmazva trigonometrikus Pitogarasz-tételt felírhatjuk a következő egyenletet:

$$4\sin x\cdot\cos x+3\cos^{2}x+\sin^{2}x=0$$ (1 pont)

Az egyenletet $\cos^{2}x$-szel leosztva ($\cos^{2}x\neq 0$, hiszen abban az esetben ellentmondásra jutnánk, mivel $4\cdot(\pm 1)\cdot 0+3\cdot 0+1\neq 0$). (1 pont)

$$4\frac{\sin x}{\cos x}+3\frac{\cos^{2}x}{\cos^{2}x}+\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=0$$

$$4\operatorname{tg}x+3+\operatorname{tg}^{2}x=0$$ (1 pont)

Mivel ez egy $\operatorname{tg}x$-re másodfokú polinom függvény, így alkalmazhatjuk a megfelelő megoldóképletet. Így a függvény két gyöke a $\operatorname{tg}x_1=-1$ és a $\operatorname{tg}x_2=-3$. (1 pont)

Ebből $\mathbf{x_1=-\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi}$, (1 pont)

illetve $\mathbf{x_2=\frac{-71{,}565\pi}{180}+m\cdot\pi}$ a két megoldás. $\mathbf{l,m\in\mathbb{Z}}$ (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára való hivatkozással. (1 pont)

Összesen: 13 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Miklós, a fűszerkereskedő úgy döntött, hogy saját mozsarat fog tervezni és árulni. A tervezet szerint minden egyes mozsár egyetlen, homogén, természetes gránittömbből készülne, amelyekből először egy 5 cm oldalhosszú, szabályos kilencszög alapú hasábot vágnak ki, melynek magassága 8 cm. Ezt követően egy üreget fúrnak bele az egyik alapon keresztül úgy, hogy a mozsár túloldalán, tehát az alján maradjon 1 cm magas, tömör gránit. Az üreg alakját egy 12 cm átmérőjű félgömb, illetve az arra pontosan helyezkedő, szintén 12 cm átmérőjű egyenes henger adja.

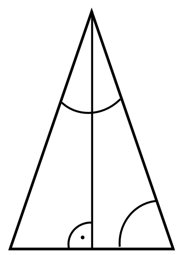
a) Mekkora tömege lesz egy ilyen mozsárnak, ha a gránit sűrűsége $2750\ \frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m}^3}$? Válaszát három tizedesjegyre kerekítse! (9 pont)

Adott az alábbi állítás: Minden pozitív egész *n* esetén a $11^{n+2}+12^{2n+1}$ kifejezés osztható 133-mal.

b) Döntse el, hogy igaz-e az állítás! Válaszát indokolja! (7 pont)

Megoldás:

a) A hasáb térfogatának kiszámításához először az alapját alkotó szabályos kilencszög területét kell meghatározni, mely egyenlő az azt alkotó 9 db egybevágó, egyenlőszárú háromszög területének összegével. (1 pont)



Ezen egyenlőszárú háromszögek szárszöge $\frac{360°}{9}=40°$, így az alapon fekvő szögei $70°$ -ak. Továbbá alapja 5 cm, míg magassága a szimmetriai okok miatt alkalmazható szögfüggvény alapján felírható összefüggésből számítható ki: $\operatorname{tg}70°=\frac{m}{2,5}$, tehát $2,5\cdot\operatorname{tg}70°=m\approx 6,8687\text{ cm}$. Egy ilyen háromszög területe így $\frac{5\cdot 6,8687}{2}=17,1717\text{ cm}^2$, (1 pont)

ebből pedig a szabályos kilencszögé $9\cdot 17,1717=154,5456\text{ cm}^2$. (1 pont)

Így a hasáb térfogata $V_{\text{hasáb}}=t\cdot M=154,5456\cdot 8=1236,3648\text{ cm}^3$. (1 pont)

A mozsár térfogatának kiszámításához ebből ki kell vonni a kifúrt térfogat nagyságát, mely a félgömbből és a rá illeszkedő egyenes hengerből áll. (1 pont)

A félgömb sugara 6 cm, így felírhatjuk, hogy $V_{\text{félgömb}}=\frac{\frac{4r^3\cdot\pi}{3}}{2}=\frac{4\cdot 6^3\cdot\pi}{6}=144\pi$. (1 pont)

A feladat szövege szerint 1 cm-t kell hagyni a mozsár aljának, tehát az egyenes henger magassága $M_{\text{hasáb}}-R_{\text{félgömb}}-M_{\text{henger}}=1\text{ cm}$ összefüggés alapján $M_{\text{henger}}=1\text{ cm}$.

Tehát a henger térfogata $V_{\text{henger}}=r^2\cdot\pi\cdot M_{\text{henger}}=36\pi$. (1 pont)

A mozsár térfogata így $V_{\text{mozsár}}=1236,3648-144\pi-36\pi=670,8782\text{ cm}^3$, mely köbméterbe átváltva $0,0006708782\text{ m}^3$. (1 pont)

A mozsár tömege tehát $0,0006708782\text{ m}^3\cdot 2750\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}=\mathbf{1,845\ kg.}$ (1 pont)

b) Az állítást teljes indukcióval fogjuk bizonyítani. (1 pont)

Először is vizsgáljuk meg, hogy igaz-e $n=1$-re.

$11^{1+2}+12^{2\cdot1+1}=1331+1728=3059$, mely valóban osztható 133-mal. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n=k$-ra. (indukciós feltevés)

Ez alapján teljesül-e az állítás $n=k+1$-re?

$11^{k+1+2}+12^{2\cdot(k+1)+1}=11\cdot11^{k+2}+12^2\cdot12^{2k+1}$ (1 pont)

Ezt a következőképpen felírva $11\cdot\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)+\left(12^2-11\right)\cdot12^{2k+1}$ (1 pont)

beláthatjuk, hogy az első tag az indukciós feltevés miatt osztható lesz 133-mal, míg a második, a $12^2-11=133$-as szorzótényező miatt lesz osztható vele. (1 pont)

Ezzel beláttuk, hogy a vizsgált tulajdonság, tehát a kifejezés oszthatósága 133-mal, öröklődik, így minden pozitív *n* egész számra teljesül. (1 pont)

Tehát az állítás igaz. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6. A Fővám téri Fürdő Szekció Zrt. egy logót szeretne készíttetni az egyik vízi kampányukhoz. Elképzelésük szerint a logó egy sárga, illetve egy kék színű, egymást metsző körlapokból állna, amelyek koordináta-rendszerbeli egyenlete ilyen sorrendben a következő: $x^2-12x+y^2+6y+20=0$, illetve $x^2-22x+y^2-8y+88=0$.

a) Számítsa ki a metszetük által képzett zöld[1] terület nagyságát területegységben! Válaszát két tizedesjegyre kerekítse! (10 pont)

Adott az $a_n=\dfrac{14n-8}{8n+3}$ természetes számok halmazán értelmezett számsorozat.

b) Hányadik tagtól kezdődően lesz a tagok és a sorozat határértékének különbsége kisebb, mint $\dfrac{1}{1000}$? (6 pont)

Megoldás:

a) Átrendezve az egyenleteket felírhatjuk, hogy a

$$k_1=(x-6)^2+(y+3)^2=25,\ \text{melyből } r_1=5$$
$$k_2=(x-11)^2+(y-4)^2=49,\ \text{melyből } r_2=7$$
(1 pont)

A két kör metszéspontjait az általuk alkotott egyenletrendszer gyökei adják.

$$\left.\begin{aligned}x^2-12x+y^2+6y+20=0\\ x^2-22x+y^2-8y+88=0\end{aligned}\right\}$$
(1 pont)

Az első egyenletből kivonva a másodikat felírhatjuk, hogy:

$$10x+14y=68$$

$5x+7y=34$ (mely a körök metszéspontján áthaladó egyenes egyenlete is egyben.) (1 pont)

$y=\dfrac{34-5x}{7}$ összefüggést az átrendezett első egyenletbe behelyettesítve a következő megoldandó egyenletet kapjuk:

$(x-6)^2+\left(\dfrac{34-5x}{7}+3\right)^2=25$, mely az alábbi másodfokú egyenlethez vezet:

$$37x^2-569x+1782=0$$
(1 pont)

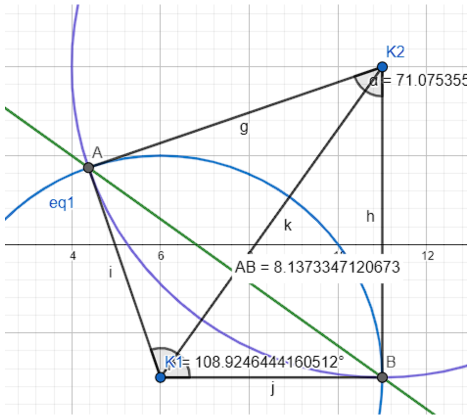
Ebből $x_1=11$, ahonnan $y_1=\dfrac{34-5\cdot 11}{7}=-3$. Tehát $A(11;-3)$.

Illetve, $x_2=\dfrac{162}{37}$, ahonnan $y_2=\dfrac{34-5\cdot\frac{162}{37}}{7}=\dfrac{64}{37}$. Tehát $B\left(\dfrac{162}{37};\dfrac{64}{37}\right)$.

Innen a pontok távolsága $|AB|=\sqrt{\left(\dfrac{162}{37}-11\right)^2+\left(\dfrac{64}{37}+3\right)^2}=\dfrac{35\sqrt{74}}{37}\approx 8{,}1373$. (1 pont)

[1] A zöld terület nagysága, a színkeverés miatt, a kék és sárga körlapok átfedésének területével lesz egyenlő.

A keresett területet a AB végpontokkal rendelkező közös húr által alkotott körszeletek adják. Továbbá a K_1K_2 szakasz szimmetriai okok miatt merőlegesen felezi ezt a húrt. Legyen ez a metszéspont az O pont.



Mivel a BOK_1 háromszög derékszegű, így felírható az alábbi szögfüggvény:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\frac{8{,}1373}{2}}{5}=54{,}4623°\Rightarrow\beta=108{,}9246° \qquad \text{(1 pont)}$$

Így k_1-hez tartozó körszelet területe megegyezik a $\beta=108{,}9246°$ nyílásszögű körcikk, illetve a $\beta=108{,}9246°$ szárszögű, egyenlőszárú háromszög területének különbségével.

$$T_{\text{körszelet1}}=\frac{108{,}9246°\cdot 5^2\cdot\pi}{360°}-\frac{5\cdot 5\cdot\sin 108{,}9246°}{2}=11{,}9393 \text{ területegység.} \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a BOK_2 háromszög derékszögű, így felírható az alábbi szögfüggvény:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{8{,}1373}{2}}{7}=35{,}5377°\Rightarrow\alpha=71{,}0754° \qquad \text{(1 pont)}$$

Így k_2-höz tartozó körszelet területe megegyezik a $\alpha=71{,}0754°$ nyílásszögű körcikk, illetve a $\alpha=71{,}0754°$ szárszögű, egyenlőszárú háromszög területének különbségével.

$$T_{\text{körszelet2}}=\frac{71{,}0754°\cdot 7^2\cdot\pi}{360°}-\frac{7\cdot 7\cdot\sin 71{,}0754°}{2}=7{,}2165 \text{ területegység.} \qquad \text{(1 pont)}$$

Így a keresett terület nagysága $11{,}9393+7{,}2165$ $\approx$ **19,16 területegység.** (1 pont)

b) Határozzuk meg a sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{14n-8}{8n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{14-\frac{8}{n}}{8+\frac{3}{n}}=\frac{14-0}{8+0}=\frac{14}{8}=1{,}75. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen n esetén esnek a sorozat értékei a határérték 0,001 környezetén belül. Így felírhatók az alábbi egyenlőtlenségek:

$$1{,}749<\frac{14n-8}{8n+3}<1{,}751 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$13{,}992n+5{,}247<14n-8<14{,}008n+5{,}253$$

$$-0{,}008n+13{,}247<0<0{,}008n+13{,}253 \qquad \text{(1 pont)}$$

Mivel a jobb oldal mindig pozitív, bal oldali egyenlőtlenséget kell megoldani. (1 pont)

$$13{,}247<0{,}008n$$

$$1655{,}875<n \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát az **1656. tagtól** kezdve lesz az adott különbség kisebb, mint $\frac{1}{1000}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7. Bálint egy rendezvényszervező cégnél dolgozik, és azt a megbízást kapták, hogy egy sportnapot kell megszervezniük különböző programokkal. Az egyik program a sok közül egy kosárlabda-bajnokság, ahol 5 csapat vesz részt, és mindegyik csapat mindegyik másik csapattal játszik. A meccsek végkimenetelére a bajnokság kezdetéig fogadni is lehet, mindegyik esetben 3 opcióra: A csapat nyer, döntetlen, B csapat nyer. Csak olyan szelvényt lehet kitölteni, ahol az összes meccsre kell fogadni.

a) Mekkora eséllyel lesz hibátlan szelvényünk, ha 1000 különböző szelvényt töltünk ki? (4 pont)

A rendezvényen 9 résztvevővel tollaslabda-bajnokság is zajlik, ahol mindenki megmérkőzik egymással. Eddig ennyi meccset játszottak le a résztvevők: 5; 4; 4; 4; 3; 3; 2; 1; 0.

b) Hány meccset kell még játszaniuk ahhoz, hogy mindenki játsszon mindenkivel? (3 pont)

A sportnapon lehetőség van íjászkodni is. Összesen 10 nyílvessző áll rendelkezésre, és egy alkalomhoz 6 nyílvesszőt biztosítottak a szervezők (miután valaki kilőtte mind a hatot, összeszedik azt a hatot, és visszateszik a többi közé).

c) Mekkora valószínűséggel kaphatta egymás után 3 ember is ugyanazt a 6 nyilat a 10-ből? (4 pont)

A sportnap zárórendezvénye egy futóverseny volt, amin szülő-gyermek párosok indulhattak. (Egyéni futóverseny, azonban csak párosával lehetett jelentkezni.) Tudjuk, hogy az első 8 helyezett pont 4 ilyen páros volt, akik mind egymás után értek be páronként.

d) Hányféleképpen érhet be a célba az összes versenyző, ha összesen 10 szülő-gyermek páros indult a versenyen, viszont 2 gyerek és 2 szülő sosem ért be egymást követően a célba? (5 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Tudjuk, hogy mivel csoportmérkőzés van, ezért mindenki játszik mindenkivel, azaz összesen $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ mérkőzés lesz összesen. (1 pont)

Viszont ahhoz hogy biztos nyerjünk, mind a 3 opcióra fogadnunk kell a szelvényeken. (1 pont)

Vagyis összesen: $3^{10}=59049$ szelvényt kellene kitöltenünk. (1 pont)

Mivel 1000 szelvényt töltöttünk ki, ezért $\frac{1000}{59049}\approx \mathbf{0{,}017}$ valószínűséggel lesz hibátlan szelvényünk. (1 pont)

b) A lejátszott meccseket összeadva megkapjuk, hogy összesen $\frac{5+4+4+4+3+3+2+1}{2}=13$ meccset játszottak le eddig, hiszen minden meccset kétszer számoltunk. (2 pont)

Ahhoz, hogy 36 meccset játsszanak összesen, játszaniuk kell még $36-13=$ **23** meccset. (1 pont)

c) Az, hogy valaki kihúzzon 6 nyilat $\binom{10}{6}$-féleképpen teheti meg.

Az utána lévő embereknek viszont muszáj azt a 6 nyilat kihúzniuk, vagyis $\binom{6}{6}^2$-féleképpen tudnak dönteni. (1 pont)

Az összes lehetséges eset $\binom{10}{6}^3$-féleképpen fordulhat elő. (1 pont)

Az egész valószínűsége így: $\dfrac{\binom{10}{6}\binom{6}{6}^2}{\binom{10}{6}^3} = \dfrac{1}{44100} = 0,00002267573$ (1 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy 3 ember is ugyanazt a 6 nyilat húzza, az $\mathbf{\dfrac{1}{44100}}$ valószínűséggel fog bekövetkezni. (1 pont)

d) Először kiválasztjuk a 10 párosból azt a 4-et, akik előbb értek célba $\binom{10}{4}$. (1 pont)

Majd őket $4!\cdot 2$ féleképpen tudjuk elhelyezni. (1 pont)

Ez $\binom{10}{4}\cdot 4!\cdot 2 = 10080$ féleképpen fordulhat elő. (1 pont)

Majd pedig az őket követő 12 befutót (6 párt) $6!\cdot 6!$ féleképpen tudjuk elhelyezni, mivel a 8.-ként befutó egyértelműen meghatározza azt, hogy a 9. befutó gyerek vagy felnőtt lesz. (1 pont)

Tehát összesen $\binom{10}{4}\cdot 4!\cdot 2\cdot 6!\cdot 6! = \mathbf{5\,225\,472\,000}$ féleképpen érhetnek be a célba. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8. Adott az alábbi két függvény:

$$f(x)=2x^2-9x-12$$

$$g(x)=-4x^2-2x+12$$

a) Határozza meg az f és g függvények grafikonjai által közbezárt terület nagyságát! (7 pont)

b) Számítsa ki a $h(x)=\frac{1}{3}x^3-8,5x^2+66x-69$ függvény lokális szélsőérték helyét/helyeit, és az inflexiós pontját! (5 pont)

Egy forró nyári napon Dorina elment a piacra görögdinnyéket vásárolni kedvenc eladójához. Mikor megérkezett az eladó annyira megörült neki, hogy felajánlotta, hogy a görögdinnyéket most ő állja, de egy csavarral. Annyi darab dinnyét ad Dorinának, amekkora lesz a $\frac{9n+56}{n+5}$ tört értéke. Dorina ismeri ezt a trükköt, ezért elhatározza, hogy csak egész dinnyéket visz haza, hogy ne romoljanak meg a nagy hőségben.

c) Mekkora lehet az n értéke ebben az esetben? (4 pont)

Megoldás:

a) Először meg kell határozni a két függvény metszéspontjait, tehát ahol $f=g$, vagyis $2x^2-9x-12=-4x^2-2x+12$ egyenlet gyökeit. Ezt átrendezve megkapjuk a $0=6x^2-7x-24$ másodfokú egyenletet, melynek gyökei, ezáltal a két pontunk a $-\frac{3}{2}$ és a $\frac{8}{3}$ lesznek. (2 pont)

A két függvény közti terület a függvények különbségének ($g-f$, hiszen a vizsgált intervallumon a g függvény vesz fel nagyobb értékeket) határozott integráltjával számolható ki, ezért az alábbi integrálást kell elvégeznünk:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{8}{3}} -4x^2-2x+12-\left(2x^2-9x-12\right)dx=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{8}{3}} -6x^2+7x+24\,dx,$$ (1 pont)

A Newton-Leibniz formulával számítsuk ki a határozott integrált:

$$\left[-\frac{6x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+24x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{8}{3}}$$ (1 pont)

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\left(-\frac{6\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3}{3}+\frac{7\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2}{2}+24\cdot\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{6\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3}+\frac{7\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{2}+24\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=$$ (1 pont)

$$=\left(-\frac{1024}{27}+\frac{224}{9}+64\right)-\left(\frac{27}{4}+\frac{63}{8}-36\right)=$$ (1 pont)

$$=\frac{1376}{27}-\left(-\frac{171}{8}\right)=\mathbf{72,338}$$ **területegység.** (1 pont)

b) A $h(x)=\frac{1}{3}x^3-8,5x^2+66x-69$

A függvénynek ott lesz lokális szélsőértéke, ahol az első derivált nullát vesz fel, vagyis

$h'(x)=x^2-17x+66=0$. (1 pont)

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva $x_1=11$ és $x_2=6$ lesz a két gyökünk,

Amiből $\boldsymbol{x_1=11}$, és $\boldsymbol{x_2=6}$ lesznek a szélsőérték helyeink, miután megvizsgáltuk, hogy ezek nem inflexiós pontjai lesznek a kifejezésnek. (2 pont)

A függvénynek ott lesz inflexiós pontja, ahol a második derivált nullát vesz fel, vagyis

$h''(x)=2x-17=0$. (1 pont)

Ezt az egyenletet megoldva $x=8,5$ lesz a megoldásunk,

tehát a függvénynek az $\boldsymbol{x=8,5}$ lesz az inflexiós pontja. (1 pont)

c) A $\frac{9n+56}{n+5}$ törtet két tört összegeként felírjuk: $\frac{9n+45}{n+5}+\frac{11}{n+5}$, ahol $n\neq-5$

A tört első fele így mindig egy egész szám lesz, hiszen egyszerűsíthető 9-re. (1 pont)

Ezután a $\frac{11}{n+5}$ törtnek kell egész számnak lennie, ehhez az $n+5$-nek 11 egyik pozitív osztójával kell, hogy egyenlő legyen. (1 pont)

11-nek 2 ilyen osztója van, amik a 11 és az 1, (1 pont)

Vagyis ezáltal az *n* értéke a **–4** és a **6** lehetnek csak. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9.

a) Bizonyítsa be, hogy a szabályos sokszögek közül csak a háromszöggel, négyszöggel és hatszöggel fedhető le egyrétűen és hézagmentesen egy sík! (7 pont)

b) Deltoid alakú papírsárkányt készítünk, melynek két átlója 6 és 4 méter hosszú. A rövidebbik átló két különböző szög alatt látszik a négyszög két csúcsából, melyek közül az egyik $110°$. A reptetéshez szükséges madzagot a deltoid azon belső pontjához fogjuk kötni, mely a síkidom minden oldalától egyenlő távolságra van. Mekkora ez a távolság, illetve mekkora szög alatt látszódnak ebből a pontból a deltoid oldalai? Válaszát két tizedesjegyre kerekítse! (9 pont)

Megoldás:

a) Ahhoz, hogy egyrétűen és hézagmentes fedjük le a síkot egy adott szabályos sokszöggel, az szükséges, hogy megfelelően illeszkedjenek egymáshoz az adott síkidomok. Mivel az oldalhosszok minden esetben megegyeznek, így a szögeket kell megvizsgálni, mely n szögű sokszög esetében mindig $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Akkor illeszkednek megfelelően a síkidomok, ha a csúcsai(k)nál érintkező síkidomok adott belső szögeiknek összege pont $360°$. (2 pont)

Tehát matematikailag felírható, hogy a $\frac{360°}{\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}}$ törtnek pozitív egész számú hányadosa esetén létezik olyan szabályos n szög, amire igaz a vizsgált állítás. (1 pont)

$\frac{360°}{\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}} = k$, ahol k pozitív egész szám.

$$k = 360°\cdot\frac{n}{(n-2)\cdot 180°} = \frac{n\cdot 360°}{(n-2)\cdot 180°} = \frac{2n}{n-2}$$ (1 pont)

Egész rész leválasztást alkalmazva ez felírható a következő módon is:

$$2+\frac{4}{n-2}.$$ (1 pont)

Mivel a 4-nek 3 db pozitív osztója van (1;2;4), így fenti kifejezés csak $n\in\{3;4;6\}$ esetén lesz egész szám. (1 pont)

A szabályos háromszög minden szöge 60, a szabályos négyszög minden szöge 90, míg a szabályos hatszög minden szöge 120 fokos, melyek mind a 360 osztói. (1 pont)

Ezzel az állítást beláttuk.

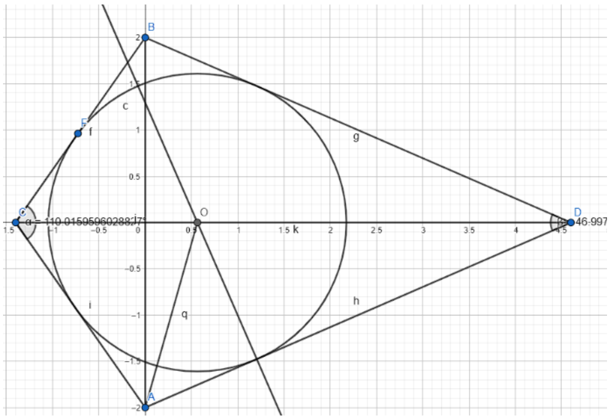
b) A keresett pont a deltoidba írható kör középpontja lesz, mely a síkidom belső szögfelezőinek metszéspontja. (1 pont)

Kihasználva, hogy a deltoid átlói merőlegesen felezik egymást a K pontban, illetve hogy szimmetriai okok miatt a hosszabbik átló egyben szögfelezője a 110 fokos szögnek, felírhatjuk az alábbi szögfüggvényt:

$$\mathrm{tg}\,55° = \frac{2}{CK} \Rightarrow CK \approx 1,4 \text{ egység} \Rightarrow KD \approx 4,6 \text{ egység}.$$ (1 pont)

Ebből következik, hogy:

$$\mathrm{tg}\,KAD_{\measuredangle} = \frac{4,6}{2} \Rightarrow KAD_{\measuredangle} = 66,5° \Rightarrow CAD_{\measuredangle} = 66,5° + 35° = 101,5°$$ (1 pont)



$DAO_{\sphericalangle} = \dfrac{101,5°}{2} = 50,75°$

$OAK_{\sphericalangle} = 66,5° - 50,75° = 15,75°$ (1 pont)

$\cos 15,75° = \dfrac{2}{AO} \Rightarrow AO = 2,078$ (1 pont)

$\sin 50,75° = \dfrac{r}{AO} \Rightarrow$ $\boldsymbol{r = 1,61}$ (1 pont)

$AOD_{\sphericalangle} = 180° - ADO_{\sphericalangle} - DAO_{\sphericalangle} =$

$AOD_{\sphericalangle} = 180° - \dfrac{47°}{2} - 50,75° = 105,75°$. (1 pont)

Ebből $AOC_{\sphericalangle} = 180° - 105,75° = 74,25°$. (1 pont)

Szimmetriai okok miatt a deltoid *BD* és *AD* oldalai $\mathbf{105,75°}$, míg a *BC* és *AC* oldalak $\mathbf{74,25°}$ szög alatt látszódnak az adott pontból, továbbá a kérdezett távolság **1,61 m** hosszú. (1 pont)

Összesen: 16 pont

A szerezhető maximális pontszám: 115 pont