MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Javítási útmutató

2020. február 15.

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA SZEKCIÓ

PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2020. február 15.

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+6}=2$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A gyök alatt található kifejezésre a kikötés: $x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -6$.

Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk. (1 pont)

$x+6=4 \Rightarrow \boldsymbol{x=-2}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

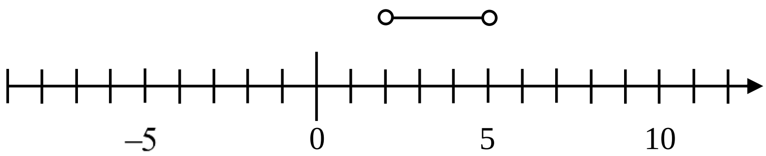
2) Adott az $A:[-1;5[$, a $B:]2;8]$ és a $C:[0;4]$ halmazok.

a) Adja meg az $A\cap B$ halmazt! **(1 pont)**

b) Határozza meg a $B\setminus C$ halmazt! **(1 pont)**

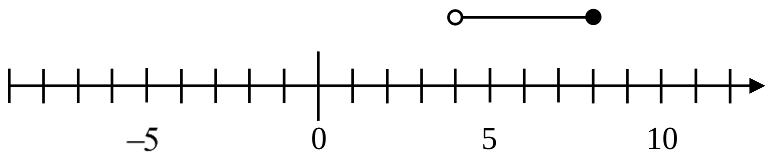
Megoldás:

a)



$\boldsymbol{A\cap B=]2;5[}$ (1 pont)

b)



$\boldsymbol{B\setminus C=]4;8]}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Egy ruhaüzletben az egyik nadrág árát először felemelték 20%-kal, majd később egy leárazás során 25%-kal csökkentették. Az árváltozások után a nadrág 8100 Ft-ba került. Mennyi volt a nadrág eredeti ára? **(2 pont)**

Megoldás:

A nadrág eredeti árát *x*-szel jelölve, az alábbi egyenlet írható fel:
$0,75(1,2x)=8100 \Rightarrow 0,9x=8100$

$\boldsymbol{x=9000}$ **Ft** (2 pont)

Összesen: 2 pont

4) Mekkora az α szög, ha $90°<\alpha<180°$ és $\sin\alpha=0,5$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\sin\alpha=0,5$

$\alpha_1=30°+k\cdot 180°$, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

$\alpha_2=150°+l\cdot 180°$, ahol $l\in\mathbb{Z}$. (1 pont)

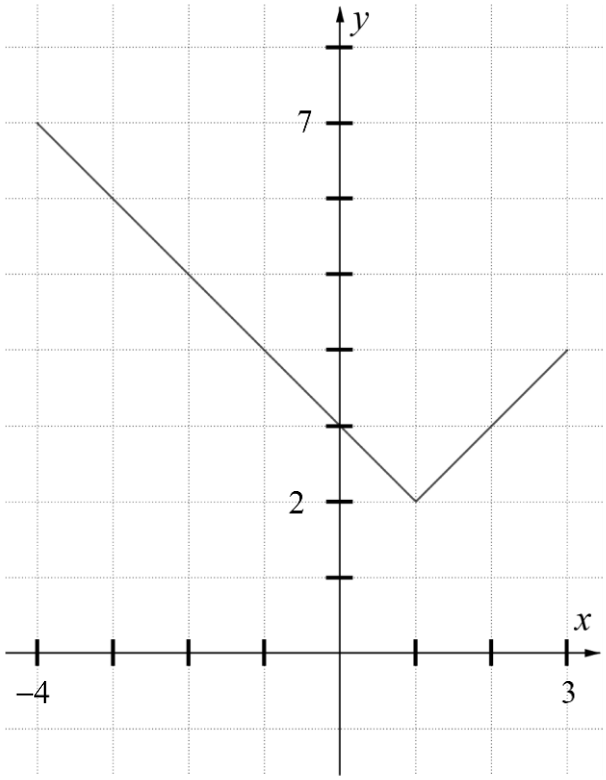
Amelyből a megadott intervallumon belül eső érték: $\boldsymbol{\alpha=150°}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Adja meg a $[-4;3]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x-1|+2$ függvény értékkészletét!

(2 pont)

Megoldás:



A függvény értékkészlete: $\mathbf{[2;7]}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

6) A $\overline{294b}$ egy olyan négyjegyű szám, amely osztható hattal. Adja meg *b* lehetséges értékeit! (3 pont)

Megoldás:

Ahhoz, hogy a hattal oszthatóság teljesüljön a $\overline{294b}$ szám esetében, oszthatónak kell lennie kettővel és hárommal is.

Kettővel akkor lesz osztható, ha *b* páros szám. Tehát *b* lehetséges értékei: 0; 2; 4; 6; 8. (1 pont)

Hárommal akkor osztható egy szám, ha számjegyeinek összege osztható hárommal. Így a $2+9+4+b$ összegnek a három többszörösének kell lennie.

Ebből *b* lehetséges értékei: 0; 3; 6; 9. (1 pont)

Egyedül a $b=0$-ra és $b=6$-ra teljesül mindkét feltétel.

Tehát a két megoldás: $\boldsymbol{b_1 = 0}$ és $\boldsymbol{b_2 = 6}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

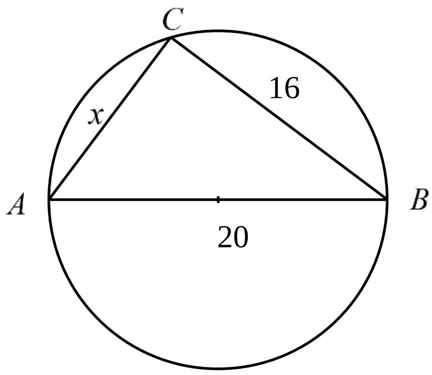
7) Egy sakkversenyen 8 versenyző játszik körmérkőzést (mindenki egyszer játszik mindenkivel). Lehetséges-e, hogy a verseny szünetében egy versenyző van, aki öt, kettő, aki három, egy, aki kettő és négy, aki egy mérkőzést játszott le? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

A feladatban leírt problémát egy olyan gráfként kezelhetjük, amelynek a csúcsai az egyes versenyzőket jelölik. Két csúcsot akkor köti össze él, ha a két adott versenyző már játszott mérkőzést egymással.
Ismerjük az egyes pontokhoz tartozó fokszámokat, ezeket összeadva megkapjuk a fokszámok összegét: $1\cdot5+2\cdot3+1\cdot2+4\cdot1=17$. (1 pont)
Mivel a gráf fokszámainak összege az élek számának kétszerese, ezért csak páros szám lehet.
A 17 nem páros szám, ezért **nem lehetséges**, hogy a versenyzők a feladatban megadott számú mérkőzést játszottak. (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Az ábrán látható háromszög *AB* oldala 20 egység hosszú, és ez az oldal a háromszög köré írható kör átmérője. Milyen hosszú az *AC* oldal, ha tudjuk, hogy a *BC* oldal hossza 16 egység? Megoldását részletezze! (3 pont)



Megoldás:

A Thálesz-tételt felhasználva tudjuk, hogy a háromszög derékszögű. (1 pont)
Ebből következően alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt:
$16^2+x^2=20^2$ (1 pont)
Az egyenletet átrendezve: $x^2=400-256=144$.
Az oldal hosszúsága negatív értéket nem vehet fel.
Tehát az *AC* oldal hossza **12 egység**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

9) Anna, Béla, Cili, Dénes és Erik moziba mennek. Hányféleképpen tudnak leülni egymás mellé? (2 pont)

Megoldás:

Öt elemet rendezünk sorrendbe, minden elemet felhasználva, ezért az ismétlés nélküli permutáció képletét alkalmazzuk.
A lehetséges sorrendek száma tehát: $\mathbf{5!=120}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

10) Egy mértani sorozat negyedik tagja -108, a hetedik tagja pedig 2916. Adja meg a sorozat első öt tagjának összegét! Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

A mértani sorozat *n*-edik elemének képlete: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$.

Ezt felhasználva: $-108=a_1\cdot q^3$ és $2916=a_1\cdot q^6$. (1 pont)

$$\frac{a_7}{a_4}=\frac{a_1\cdot q^6}{a_1\cdot q^3}=q^3\Rightarrow q^3=\frac{2916}{-108}=-27\Rightarrow q=-3$$ (1 pont)

$$a_1=\frac{a_4}{q^3}=\frac{-108}{-27}=4$$ (1 pont)

Az első öt tag összegének képlete: $S_5=a_1\cdot\frac{q^5-1}{q-1}=4\cdot\frac{(-3)^5-1}{-3-1}=244$. (1 pont)

Az első öt tag összege **244.**

Összesen: 4 pont

11) Andi az év során 9 érdemjegyet kapott matematikából, melyet az alábbi táblázat foglal össze:

Érdemjegy	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Érdemjegyek száma	**0**	**1**	**2**	**2**	**4**

Mennyivel növekedne Andi átlaga matematikából, ha kapna még egy ötöst?

Megoldás:

Az átlag kiszámításához az érdemjegyek gyakorisággal súlyozott összegét osztani kell érdemjegyek számának összegével.

Andi eredeti átlaga: $\frac{0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+4\cdot 5}{1+2+2+4}=\frac{36}{9}=4$

Ebből az új átlag: $\frac{36+5}{9+1}=\frac{41}{10}=4{,}1$. (1 pont)

Az átlag növekedése: $4{,}1-4=\mathbf{0{,}1}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

12) Zoli bácsi egy 8200 négyzetméteres területen fogja levágni a füvet. A fűnyíró traktorának tankja téglatest alakú, melynek élei 35 cm, 20 cm és 10 cm hosszúságúak. Minimum hányszor kell majd újratöltenie az üzemanyagtartályt, ha tele tankkal indul és fűnyíró fogyasztása $\mathbf{0{,}3\ l/100\ m^2}$? Megoldását részletezze! **(4 pont)**

Megoldás:

A munka során a fűnyíró fogyasztása: $8200\cdot\frac{0{,}3}{100}=24{,}6\ \text{l}$. (1 pont)

A fűnyíró tankjának térfogata: $V=35\cdot 20\cdot 10=7000\ \text{cm}^3$. (1 pont)

A térfogat literre átváltva: $7000\ \text{cm}^3=7\ \text{dm}^3=7\ \text{l}$. (1 pont)

$\frac{24{,}6}{7}\approx 3{,}51\Rightarrow$ Tehát Zoli bácsinak **legalább háromszor** meg kell állnia újratölteni a fűnyírója üzemanyagtartályát. (1 pont)

Összesen: 4 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! (6 pont)

$$\mathbf{9^x - 5 \cdot 3^x = 324 + 8 \cdot 3^{x+2}}$$

b) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlet? (6 pont)

$$\mathbf{\log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4x = 0}$$

Megoldás:

a) A hatványozás azonosságait felhasználva átalakítjuk az egyenletet, majd nullára rendezzük.

$\left(3^x\right)^2 - 5 \cdot 3^x = 324 + 72 \cdot 3^x \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - 77 \cdot 3^x - 324 = 0$ (1 pont)

Az egyenlet másodfokúra visszavezethető, ezért új ismeretlent vezetünk be: $a = 3^x$.

$a^2 - 77a - 324 = 0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet két gyöke: $a_1 = 81$ és $a_2 = -4$. (1 pont)

Visszahelyettesítve a értékét:

1. eset: $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $\boldsymbol{x = 4}$. (1 pont)

2. eset: $3^x = -4$

A 3^x kifejezés értékkészlete $\mathbb{R}^+$, melynek a -4 nem eleme, ezért ennek az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) A logaritmus numerusa csak pozitív szám lehet, ezért a numerusban szereplő kifejezésekre kikötést kell tenni:

$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$4x > 0 \Rightarrow x > 0$ (1 pont)

A logaritmus azonosságai alapján:

$2\log_2 x + \dfrac{\log_2 4x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 0$ (1 pont)

Felhasználva, hogy: $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$

$2\log_2 x + \dfrac{\log_2 x + 2}{\log_2 \frac{1}{2}} = 0$ (1 pont)

$\log_2 \dfrac{1}{2} = -1$, ezért:

$2\log_2 x - \log_2 x - 2 = 0 \Rightarrow \log_2 x = 2$ (1 pont)

A logaritmus definíciója alapján: $x = 2^2 = \mathbf{4}$. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

Alternatív megoldás:

b) A logaritmus numerusa csak pozitív szám lehet, ezért a numerusban szereplő kifejezésekre kikötést kell tenni:

$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$4x > 0 \Rightarrow x > 0$ (1 pont)

A logaritmus azonosságai alapján:

$\log_2 x^2 + \dfrac{\log_2 4x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \log_2 x^2 - \log_2 4x = 0$ (1 pont)

$\log_2 \dfrac{x^2}{4x} = 0 \Rightarrow \log_2 \dfrac{x}{4} = 0$ (2 pont)

A logaritmus definíciója alapján:

$\dfrac{x}{4} = 2^0 \Rightarrow x = 4 \cdot 2^0 \Rightarrow \mathbf{4}$ (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

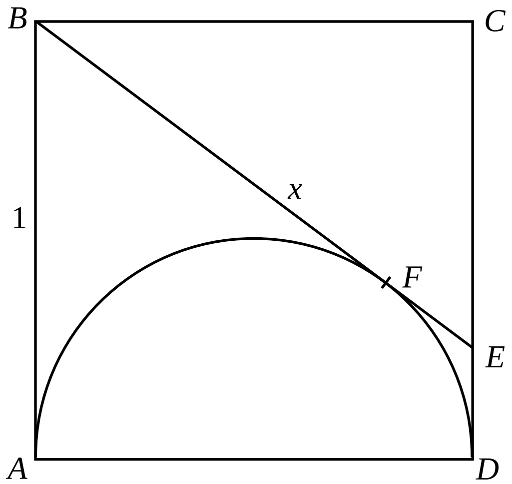
Összesen: 12 pont

14) Adott a következő állítás: *Minden rombusz húrnégyszög*.

a) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

b) Tagadja a fenti állítást! (2 pont)

c) Egy egységnyi oldalú négyzetben egy félkör helyezkedik el úgy, hogy a félkör átmérője a négyzet egyik oldala. Határozza meg a félkört *F* pontban érintő *BE* szakasz hosszát! (7 pont)



Megoldás:

a) Mivel létezik olyan rombusz, amelyik nem húrnégyszög, ezért az állítás **hamis.** (2 pont)

b) „Minden” (univerzális ítélet) tagadása a „van olyan”.
Tehát az álltás tagadása: ***Van olyan rombusz, ami nem húrnégyszög.*** (2 pont)

c) $BCE\triangle$ derékszögű, ezért alkalmazható a Pitagorasz-tétel.

$BC^2 + CE^2 = x^2$ (1 pont)

Egy körhöz ugyanazon külső pontból húzott két érintőszakasz hossza megegyezik, ebből következően: $AB = BF \Rightarrow BF = 1$ (1 pont)

Hasonlóan: $ED = EF$, mely szakaszokat jelöljünk y-nal. (1 pont)

$CE + ED = 1 \Rightarrow CE = 1 - ED = 1 - y$ (1 pont)

Az x szakasz hossza: $BF + EF = 1 + y$. (1 pont)

Behelyettesítve az egyenletbe:

$1^2 + (1-y)^2 = (1+y)^2$ (1 pont)

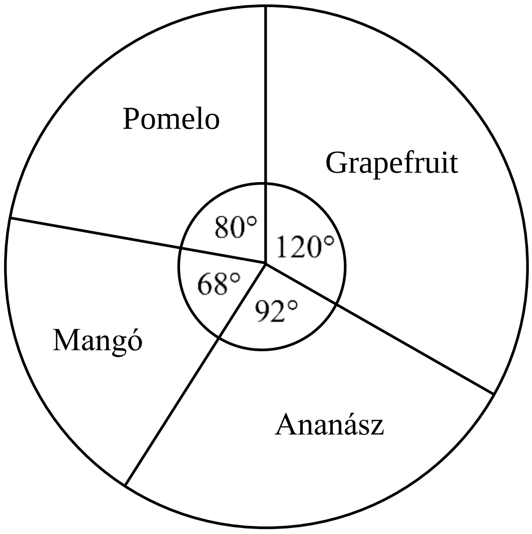
$1 + 1 - 2y + y^2 = 1 + 2y + y^2$

$4y = 1 \Rightarrow y = 0,25$

Visszahelyettesítve x-re: $\mathbf{x = 1,25}$ **egység.** (1 pont)

Összesen: 11 pont

15) Egy zöldségesnél négyféle gyümölcsöt lehet vásárolni: mangót, grapefruitot, pomelót és ananászt. December 10-én 540 kg gyümölcs volt az üzlet raktárában. A négy gyümölcs készleten belüli arányát a következő kördiagramm szemlélteti:



a) Adja meg, hogy fajtánként hány kilogramm gyümölcs van az üzlet raktárában december 10-én!

(3 pont)

Két hónappal később, február 10-én, a raktárban lévő készletek a következőképpen alakultak:

Gyümölcs	Mangó	Grapefruit	Pomelo	Ananász
Mennyiség (kg)	**85**	**200**	**135**	**120**
Ár (Ft/kg)	**750**	**350**	**600**	**500**

b) Az üzlet február 10-i készletét tekintve, számítsa ki 1 kg gyümölcs átlagos árát és a gyümölcsök kilogrammonkénti árainak szórását! A kapott eredményeket két tizedesjegyre kerekítse! (6 pont)

c) Adott az $x^2+6x+y^2-10y=15$ egyenletű kör és az e: $4x+7y=27$ egyenletű egyenes. Adja meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a kör középpontján és merőleges az *e* egyenesre! (4 pont)

Megoldás:

a) Egy gyümölcs készleten belüli arányát a kördiagrammon hozzá tartozó középponti szöge mutatja meg. (1 pont)

Ez alapján az egyes gyümölcsök mennyisége a készletben:

Mangó: $\frac{68°}{360°}\cdot 540$, pomelo: $\frac{80°}{360°}\cdot 540$, ananász: $\frac{92°}{360°}\cdot 540$, grapefruit: $\frac{120°}{360°}\cdot 540$. (1 pont)

Tehát mangóból 102 kg, grapefruitból 180 kg, pomeloból 120 kg, ananászból pedig 138 kg van készleten. (1 pont)

b) Az átlagos ár kiszámításához a súlyozott számtani közép képletét kell használnunk, ahol a súlyok az adott gyümölcs készleten belüli mennyiségei.

Az adatokat behelyettesítve: $\dfrac{85\cdot 750+200\cdot 350+135\cdot 600+120\cdot 500}{85+200+135+120}\approx 508{,}80\text{ Ft}$. (1 pont)

Helyes kerekítés. (1 pont)

Egy kilogramm gyümölcs átlagosan **508,80 forintba** kerül. (1 pont)

A szórás kiszámításához egy gyümölcs árának az átlagos ártól való eltérését súlyozni kell a készleten belüli mennyiségével.

Az adatokat behelyettesítve a kilogrammonkénti árak szórása:

$$\sigma=\sqrt{\frac{85\cdot(750-508{,}80)^2+200\cdot(350-508{,}80)^2+135\cdot(600-508{,}80)^2+120\cdot(500-508{,}80)^2}{85+200+135+120}}$$

$\approx 143{,}51\text{ Ft}$. (1 pont)

Helyes kerekítés. (1 pont)

A gyümölcsök kilogrammonkénti ára átlagosan **143,51 forinttal** tér el az átlagos ártól. (1 pont)

c) A kör középpontjának teljes négyzetté alakítjuk a kör egyenletét.

$x^2+6x+y^2-10y=15\Rightarrow(x+3)^2+(y-5)^2=49$ (1 pont)

Ebből a kör középpontja: $O(-3;5)$. (1 pont)

Az *e* egyenes normálvektora: $\underline{n}(4;7)$. (1 pont)

Mivel $\underline{n}$ vektor merőleges az *e* egyenesre, ezért ez a keresett egyenesnek irányvektora lesz.

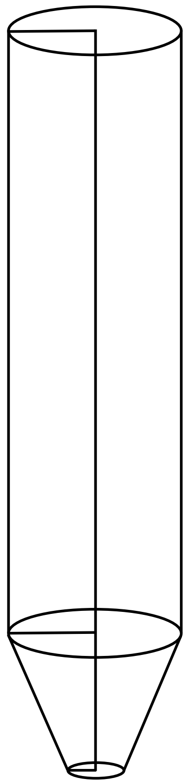
Ez alapján felírható az egyenes egyenlete: $7x-4y=7\cdot(-3)-4\cdot 5\Rightarrow \mathbf{7x-4y=-41}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16) János cége zsírkréta gyártással foglalkozik. Az általuk gyártott zsírkréták egy egyenes hengerből és egy csonkakúpból állnak. A henger alapkörének sugara 2,9 mm, a zsírkréta hegyének átmérője 2 mm, a csonkakúp alkotója 18,1 mm, magassága a henger magasságának ötöd része. A zsírkréta sűrűsége $0{,}9\ \text{kg/dm}^3$.



a) Hány kilogramm alapanyag szükséges 1000 zsírkréta legyártásához, ha a gyártás során alapanyag-veszteség nem keletkezik? (6 pont)

A zsírkrétákat gyártás után ezresével kartondobozokba csomagolják és kiszállítják az üzletekbe. Egy kartondoboz 0,1 valószínűséggel tartalmaz selejtes zsírkrétát.

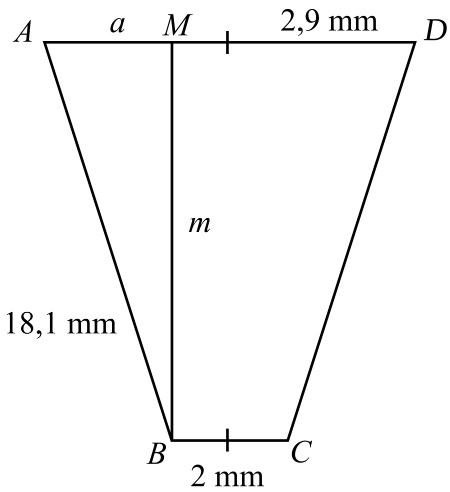
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egyik üzletbe leszállított 10 doboz közül legalább 9 csak hibátlan zsírkrétákat tartalmaz? (6 pont)

János cége év végi beszámolóját tanulmányozva megállapította, hogy a vállalkozása 10 millió forint nyereséget termelt az év során. Az elmúlt évek statisztikái alapján János úgy számol, hogy cége minden évben $12{,}5\%$-kal növeli nyereségét, az azt megelőző évhez képest.

c) Ha feltételezzük, hogy az elkövetkező években ez nem változik, akkor hány év múlva éri el a cég, éves szinten, a 19 milliós forintos nyereséget? (5 pont)

Megoldás:

a) A csonkakúp keresztmetszetét ábrázoljuk.
Az a szakasz hossza $2{,}9-1=1{,}9$ mm.



Az ABM háromszögben Pitagorasz-tétel szerint kiszámolható a csonkakúp magassága:
$18{,}1^2=1{,}9^2+m^2 \Rightarrow m^2=324 \Rightarrow m=18$ mm (1 pont)

Ezek alapján a térfogata:
$$V_{csonkakúp}=18\cdot\frac{\left(2{,}9^2+2{,}9\cdot 1+1^2\right)}{3}\cdot\pi=73{,}86\pi\ \text{mm}^3.$$ (1 pont)

A henger magassága: $M=5m=5\cdot 18=90$ mm.
A henger térfogata: $V_{henger}=90\cdot 2{,}9^2\cdot\pi=756{,}9\pi\ \text{mm}^3$. (1 pont)

Egy zsírkréta térfogata: $V_{zsírkréta}=V_{csonkakúp}+V_{henger}=830{,}76\pi\approx 2609{,}91\ \text{mm}^3$. (1 pont)

Ezer zsírkréta térfogata: $1000\cdot 2609{,}91=2609910\ \text{mm}^3$

Ezer zsírkrétához szükséges anyag térfogata köbdeciméterre átváltva: $2{,}60991\ \text{dm}^3$. (1 pont)

Melyből a tömeg: $2{,}60991\cdot 0{,}9=\mathbf{2{,}35\ kg}$. (1 pont)

b) $P(\text{tartalmaz selejtes zsírkrétát}) = 0,1$, ekkor $P(\text{nem tartalmaz selejtes zsírkrétát}) = 0,9$.

(1 pont)

A esemény: legalább 9 hibátlan zsírkrétákat tartalmazó doboz van. (1 pont)

Két különböző esetet kell vizsgálni:

1. Eset: egy doboz tartalmaz hibás zsírkrétát, kilenc dobozban pedig hibátlanzsírkréták vannak.

Ennek a valószínűsége: $\binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 = 0,3874$. (1 pont)

2. Eset: mind a tíz doboz hibátlan zsírkrétákat tartalmaz.

Melynek a valószínűsége: $0,9^{10} = 0,3487$ (1 pont)

Az *A* esemény valószínűségét a két eset valószínűségének összegeként kapjuk meg.

$P(A) = 0,3874 + 0,3487 = 0,7361$ (1 pont)

Tehát **0,7361** a valószínűsége annak, hogy 10 doboz közül legalább 9 csak hibátlan zsírkrétákat tartalmaz. (1 pont)

c) Az eltelt évek számát *t*-vel jelölve a következő egyenlőtlenség írható fel: $10\,000\,000 \cdot 1,125^t \geq 19\,000\,000$. (1 pont)

Rendezve az egyenlőtlenséget: $1,125^t \geq 1,9$.

t értékének meghatározásához mindkét oldal tízes alapú logaritmusát vesszük. (Mivel a $\lg(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a relációs jel nem fordul meg.) (1 pont)

$\lg 1,125^t \geq \lg 1,9 \Rightarrow$ a logaritmus azonosságai alapján: $t \cdot \lg 1,125 \geq \lg 1,9$. (1 pont)

Melyből: $t \geq \dfrac{\lg 1,9}{\lg 1,125} \Rightarrow t \geq 5,45$ (1 pont)

Az eltelt évek száma csak egész szám lehet, ezért felfelé, egész számra kerekítünk.

Tehát János cégének éves nyeresége **6 év** múlva éri el a 19 millió forintot. (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) Pali hétfőnként iskola után zeneiskolába jár zongoraórára. Az előző héten pontosan 5-kor indult el otthonról és 95 méter/perc sebességgel sétált a zeneiskoláig, így 1 percet késett az órájáról. Ezen a héten Pali szintén 5-kor indult otthonról, de a sebességét 105 méter/percre növelte, így ezúttal 1 perccel az óra kezdete előtt érkezett meg a zeneiskolába.

a) Milyen sebességgel kéne Palinak sétálnia, hogy 5-kor indulva otthonról, pontban a zongoraóra kezdetére érjen a zeneiskolába? (4 pont)

A zeneiskolában háromféle hangszeren tanulhatnak a diákok: zongorán, hegedűn és trombitán. A zeneiskola elsőéves diákjai 18-an vannak, ők még csak egy hangszeren tanulhatnak a három közül. A másodévesek ugyanannyian vannak, mint az elsőévesek, közülük mindenki pontosan két hangszeren tanul. Azok a diákok, akik két évnél régebben tanulnak a zeneiskolában mindhárom hangszeren játszanak. Ők negyed annyian vannak, mint a hegedülni nem tanuló másodévesek. Tudjuk, hogy azoknak a másodéveseknek a száma, akik tanulnak hegedülni megegyezik azoknak a tanulóknak a számával a zeneiskolában, akik egyszerre tanulnak zongorázni és trombitálni.

b) Hány diák jár a zeneiskolába? (7 pont)

A zeneiskolából 5 tanuló fellép egy hangversenyen. Közülük ketten fognak zongorázni, ketten hegedülni, egy diák pedig trombitán fog játszani.

c) Hányféle sorrendben követhetik egymást a különböző hangszerek a hangverseny során? (3 pont)

d) Mekkora a valószínűsége, hogy két fiú egymás után fog fellépni, ha az öt diák közül három lány, kettő pedig fiú, és a fellépés sorrendjét véletlenszerűen határozzák meg? (3 pont)

Megoldás:

a) A megtett út hossza állandó: s.
Jelöljük az indulás és az óra kezdete között eltelt időt t-vel.
Felhasználva a sebesség, idő és megtett út hossza közötti összefüggést az alábbi egyenletek írhatóak fel: $s=(t+1)\cdot 95$ és $s=(t-1)\cdot 105$. (1 pont)

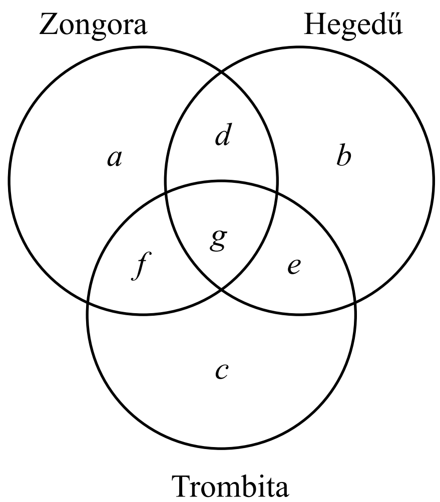
Így: $(t+1)\cdot 95=(t-1)\cdot 105$

A zárójelek felbontása után: $95t+95=105t-105$
Átrendezés után: $10t=200 \Rightarrow t=20$ perc (1 pont)

Visszahelyettesítve az egyenletbe t értékét, megkapjuk az út hosszát: $s=(20-1)\cdot 105=1995$ m (1 pont)

A keresett sebesség az út és az idő hányadosa: $v=\frac{1995}{20}=\mathbf{99{,}75}$ **méter/perc**. (1 pont)

b) Az elsőévesek száma 18 és mivel csak ők játszanak pontosan egy hangszeren, ezért: $a+b+c=18$. (1 pont)
A másodévesek száma 18 és mivel csak ők játszanak pontosan két hangszeren, ezért: $d+e+f=18$. (1 pont)
A két évnél régebb óta tanulók számáról tudjuk, hogy: $g=\frac{1}{4}f$. (1 pont)
Továbbá tudjuk, hogy: $d+e=f+g$ (1 pont)
Az utolsó egyenlet mindkét oldalához hozzáadva f-et a következőt kapjuk: $d+e+f=2f+g \Rightarrow 18=2f+g$ (1 pont)



Felhasználva, hogy $g=\frac{1}{4}f \Rightarrow f=4g$:

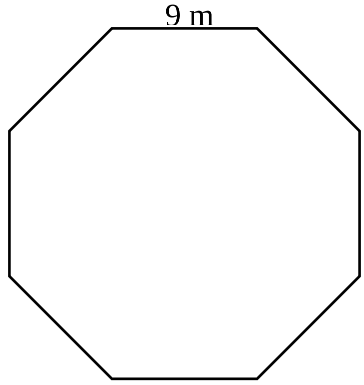
$2f+g=9g \Rightarrow 9g=18 \Rightarrow g=2$ (1 pont)
A zeneiskola diákjainak száma: $a+b+c+d+e+f+g=18+18+2=38$. (1 pont)
Tehát, a zeneiskolában összesen **38-an tanulnak.**

c) Öt hangszert 5! különböző sorrendbe tudnánk rendezni. Az öt hangszer közül azonban két-két hangszer megegyezik, ezeknek a felcserélésen nem eredményez különböző sorrendet. (1 pont)
A lehetséges sorrendek száma: $\mathbf{\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30}$ (2 pont)

d) A kereset valószínűséget a kedvező esetek és az összes lehetőség hányadosa fogja meghatározni. A kedvező esetek számának meghatározásához a két fiút egy elemnek tekintjük, így: kedvező esetek $=4!\cdot 2$ (1 pont)
Az összes eset: $5!$. (1 pont)
Tehát $\mathbf{\frac{4!\cdot 2}{5!}=0{,}4}$ valószínűséggel fog két fiú egymás után szerepelni a fellépésen. (1 pont)

Összesen: 17 pont

18) Egy cirkuszi sátor alapterületét egy szabályos nyolcszög alkotja, melynek oldalai 9 méter hosszúak. A sátor méreteit az alaprajzról készült ábra szemlélteti.



a) Számítsa ki a sátor alapterületét! (6 pont)

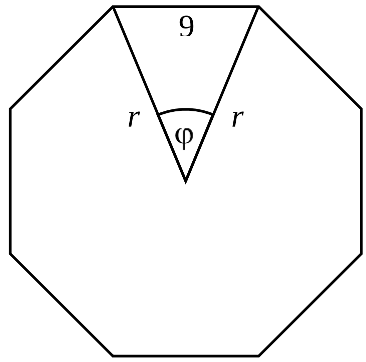
Az esti előadáson az állatidomár a produkciója során öt elefántot és három tigrist fog sorban bevezetni a porondra. A bevezetés alatt figyelnie kell arra, hogy tigrisek nem mehetnek egymás után, illetve a sort a legidősebb elefántnak kell kezdenie.

b) Hány különböző sorrendben vezetheti fel az állatokat az állatidomár? (7 pont)

A cirkusz esti előadására 1200 forintos áron vehetnek jegyet a nézők. Az előadás fellépői a jegyértékesítésből származó bevétel 60%-án osztoznak. A maradék bevételből a cirkusznak ki kell fizetnie a sátor bérleti díját, ami egy nézőszámtól független összeg.

c) Mennyi a sátor bérleti díja, ha a tulajdonos számításai alapján legalább 280 jegyet kell értékesíteni ahhoz, hogy az előadás ne legyen veszteséges? (4 pont)

Megoldás:



a) A nyolcszög felosztható nyolc egyenlőszárú háromszögre, melyeknek a területe megegyezik.

$T_{\text{nyolcszög}} = 8 \cdot T_{\text{háromszög}}$ (1 pont)

A φ szög nagysága: $\dfrac{360°}{8} = 45°$. (1 pont)

A háromszög magassága a φ szöget és az a oldalt is két egyenlő részre osztja, így a magasságot a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{m_a}{\frac{a}{2}} \Rightarrow m_a = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow m_a = 4,5\operatorname{ctg}22,5° \approx 10,86 \text{ m}$$

(2 pont)

A háromszög területe: $\dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{4,5 \cdot 10,86}{2} \approx 48,89 \text{ m}^2$. (1 pont)

Mely alapján kiszámolható a nyolcszög területe: $T_{\text{nyolcszög}} = 8 \cdot 48,89 \approx 391,10 \text{ m}^2$.

A sátor tehát **391,10 m²** alapterületű. (1 pont)

b) Sorrendbe rendezést az elefántokkal kezdjük, a legidősebb elefánt rögzített helye miatt $4!$ a lehetséges sorrendek száma. (1 pont)

Két tigris nem kerülhet egymás mögé, ezért mindenképp két elefánt közötti helyre, vagy az utolsó elefánt mögé kerülhetnek. (2 pont)

A három tigris számára öt lehetséges hely van, ezért ebből ki kell választani hármat, amelyet $\binom{5}{3}$ különbözőféleképpen tehetünk meg. (1 pont)

A helyük kiválasztása után a tigrisek közötti különböző sorrendek száma $3!$. (1 pont)

Az összes lehetséges sorrendet tehát: $\mathbf{4! \cdot \binom{5}{3} \cdot 3! = 1440}$. (2 pont)

c) 280 néző esetén a bevétel: $280 \cdot 1200 = 336000$ Ft. (1 pont)

Ennek a 40 százaléka: $280 \cdot 1200 = 336000 \cdot 0,4 = 134400$ Ft. (2 pont)

Ez az összeg pontosan elég arra, hogy fedezze a sátor bérleti díját.

Tehát a sátor bérleti díja **134400 Ft**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

A szerezhető maximális pontszám: 100 pont