PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2020. február 15.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Javítási útmutató

2020. február 15.

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA SZEKCIÓ

1. András és Béla televíziót szeretnének vásárolni és már ki is választottak egyet, de jelenleg egyiküknek sem elég rá a félretett pénze, Andrásnak még a tévé árának 25%-a hiányzik. Pár nappal később Béla elsétál a bolt mellett és észreveszi, hogy a készülék árát 10%-kal csökkentették, de még így se tudja megvenni, félretett pénzének a fele a hiányzó összeg. Egy héttel később úgy döntenek, hogy közösen ruháznak be a tévére, el is mennek megvenni, azonban szomorúan látják, hogy időközben 10%-kal újra felemelték az árat. Ekkor azonban már nem akarnak tovább várni, megveszik a kiszemelt darabot és együtt 57 600 forintjuk marad.

a) Hány forintjuk maradt volna összesen, ha még az árváltozások előtt megveszik közösen a tévét? (7 pont)

A boltban 84 televízió van raktáron, de ezeknek hatoda szállítás közben megsérült.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha ezen a héten 15 tévét adnak el, abból háromnál több rossz lesz? Válaszát két tizedesjegy pontossággal adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) Írjuk fel a három egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0,75x \\ z+\frac{z}{2} &= 0,9x \\ y+z &= 0,9\cdot 1,1\cdot x+57\,600 \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

A második egyenletből fejezzük ki z-t!

$$z+\frac{z}{2}=0,9x \Rightarrow z=0,6x$$ (1 pont)

Helyettesítsük be y-t és z-t a harmadik egyenletbe:

$$0,75x+0,6x=0,99x+57\,600$$

Rendezzük az egyenletet:

$$x=\frac{57\,600}{0,36}=160\,000 \Rightarrow \text{Tehát a tévé ára } 160\,000 \text{ Ft.}$$ (1 pont)

Helyettesítsünk vissza az eredeti egyenletekbe, hogy megkapjuk y-t és z-t!

$$y=0,75\cdot 160\,000=120\,000$$

$$z=0,6\cdot 160\,000=96\,000$$ (1 pont)

$$120\,000+96\,000-160\,000=56\,000$$ (1 pont)

Tehát kettőjüknek együtt **56 000 forintjuk** maradt volna. (1 pont)

b) A mintavétel visszatevés nélküli, tehát hipergeometrikus eloszlással számolunk.

$$84\cdot\frac{1}{6}=14 \Rightarrow \text{14 selejtes televízió van a raktárban, és 70 jó.}$$ (1 pont)

A 3-nál több selejtes komplemetere a 3, 2, 1 vagy 0 db selejtes. (1 pont)

$$P\left(\bar{A}\right)=\frac{\binom{70}{12}\binom{14}{3}+\binom{70}{13}\binom{14}{2}+\binom{70}{14}\binom{14}{1}+\binom{70}{15}\binom{14}{0}}{\binom{84}{15}}=0,7845$$ (1 pont)

$$P(A)=1-P\left(\bar{A}\right)=0,2155\approx 0,22$$ (1 pont)

Tehát **0,22 a valószínűsége**, hogy a tizenötből háromnál több rossz lesz. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{\log_x 6x} \cdot \log_6 x = \sqrt{2}$ **(9 pont)**

Igazolja, hogy az alábbi kifejezés minden *x* és *y* valós számpárra teljesül!

b) $\sin x \cdot \sin(x+y) + \cos x \cdot \cos(x+y) = \cos y$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány meghatározása:

$\log_x 6x \Rightarrow x > 0;\ x \neq 1$

$\log_x 6x \geq 0 \Rightarrow \log_x 6 + 1 \geq 0 \Rightarrow \log_x 6 \geq -1 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{6};$ vagy $1 < x$ (1 pont)

A gyök alatt álló kifejezést bontsuk fel a logaritmus azonosságait felhasználva, illetve hozzuk közös alapra az összes logaritmikus kifejezést!

$\sqrt{\log_x 6 + \log_x x} \cdot \frac{\log_x x}{\log_x 6} = \sqrt{2}$ (1 pont)

Vezessünk be egy új ismeretlent: $a = \log_x 6;\ a \neq 0$

$\sqrt{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \sqrt{2}$ (1 pont)

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát, majd rendezzük az egyenletet!

$(a+1) \cdot \frac{1}{a^2} = 2 \Rightarrow 0 = 2a^2 - a - 1$

$a_1 = 1;\ a_2 = -\frac{1}{2}$ (2 pont)

I. megoldás: $\log_x 6 = 1 \Rightarrow x = 6$ (1 pont)

II. megoldás: $\log_x 6 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{36}$, azonban visszahelyettesítve nem kapunk megoldást, a négyzetre emeléskor megjelent egy hamis gyök. (1 pont)

Az ellenőrzést behelyettesítéssel végezzük el. (1 pont)

Tehát $x = 6$. (1 pont)

b) Az addíciós tételek segítségével alakítsuk át az egyenletet!

$\sin x \cdot (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) + \cos x \cdot (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) = \cos y$ (1 pont)

Bontsuk fel a zárójeleket!

$\sin^2 x \cdot \cos y + \sin x \cdot \cos x \cdot \sin y + \cos^2 x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin x \cdot \sin y = \cos y$ (1 pont)

$\Rightarrow \sin^2 x \cdot \cos y + \cos^2 x \cdot \cos y = \cos y$

Emeljünk ki $\cos y$-t!

$\cos y \cdot (\sin^2 x + \cos^2 y) = \cos y$ (1 pont)

A trigonometrikus Pitagorasz-tétel miatt a zárójelben lévő kifejezés értéke 1.

$1 \cdot \cos y = \cos y$ (1 pont)

Azonosságra jutottunk, tehát **az állítást bizonyítottuk.** (1 pont)

Összesen: 14 pont

3. A Kisédes nevű cukrászda minden évben ünnepséget tart a bolt születésnapja alkalmából, és ennek keretein belül különleges akciókkal és finomságokkal kedveskednek a vevőknek.

a) Az alapítás hányadik évfordulóját ünnepelhetik idén, ha tudjuk, hogy ez egy olyan kétjegyű szám, amelyben a számjegyek szorzata 15-tel kisebb a cukrászda jelenlegi koránál és a cukrászda még nem élt meg fél évszázadot? (7 pont)

Az ünnepség napján egy újfajta csokis-marcipános tortával is meglepik a vendégeket. A sütemény egy rombusz alapú egyenes hasáb, melynek tetejét egy marcipán kör díszíti. A marcipán réteg a rombusz mind a négy oldalát érinti, és a rombusz hosszabbik átlója négyszerese a kör sugarának.

b) Fejezze ki a rombusz területét a sugár függvényében! (5 pont)

Megoldás:

a) A cukrászda kora: $10a+b$, ahol $a \in \{1;2;3;4\}$ és $b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Írjuk fel az egyenletet, majd rendezzük nullára:
$10a+b = a \cdot b + 15 \Rightarrow 0 = ab - 10a - b + 15$ (1 pont)

Két, egymás utáni kiemeléssel alakítsuk szorzattá a kifejezést:
$0 = a \cdot (b-10) - b + 10 + 5 \Rightarrow 0 = (a-1)(b-10) + 5$

$-5 = (a-1)(b-10) \Rightarrow$ két egész szám szorzata -5 (2 pont)

I. megoldás: $-5 = (-1) \cdot 5$

$a-1 = -1 \Rightarrow a = 0$ (1 pont)

Ez nem megoldás, mivel *a* nem lehet nulla.

II. megoldás: $-5 = 5 \cdot (-1)$

$a-1 = 5 \Rightarrow a = 6$ (1 pont)

Ez sem jó megoldás, mivel *a* kisebb 5-nél.

III. megoldás: $-5 = 1 \cdot (-5)$

$a-1 = 1 \Rightarrow a = 2$

$b-10 = -5 \Rightarrow b = 5$ (1 pont)

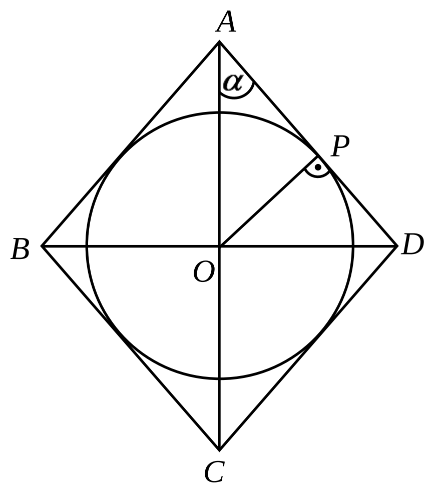
IV. megoldás: $-5 = (-5) \cdot 1$

$a-1 = -5 \Rightarrow a = -4$ (1 pont)

Nem megoldás, mivel *a* nem lehet negatív.

Tehát a cukrászda **25 éves.**

b) Helyes ábra elkészítése. (1 pont)



$OPA_\triangle : \sin\alpha = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

$OPD_\triangle : \sin 60° = \dfrac{r}{x} \Rightarrow x = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ ahol $BO = x$ (1 pont)

Legyen *AC* az *f*, *BD* pedig az *e* átló.

Tehát *f* átló hossza $4r$ egység, és *e* átló hossza $2x = \dfrac{4r}{\sqrt{3}}$ egység. (1 pont)

Ebből a rombusz területe:

$T = \dfrac{e \cdot f}{2} = \dfrac{4r \cdot 4r}{\sqrt{3} \cdot 2} = \dfrac{8r^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \cdot r^2$ (1 pont)

A sütemény alapterülete $\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \cdot r^2}$ **területegység.** (1 pont)

Összesen: 12 pont

4. Egy félkarú rablón a nyeremények összege mértani sorozatként nő minden egyes fordulóban. Ennek a mértani sorozatnak az első három tagjának összege 52 euró. Ha az első három taghoz rendre kettő, tizenkettő és hat eurót adunk hozzá, akkor az így keletkezett számok egy számtani sorozat három egymást követő tagjai lesznek.

a) Mennyi pénzt nyerhetünk a 8. fordulóban? (9 pont)

Egy másik fajta játékban egy pénzérmét dobunk fel hétszer egymás után és rögzítjük az eredményeket. A kört akkor nyerjük meg, ha a fejek és írások számának különbsége nem nagyobb háromnál.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyerünk ezen a játékon? (4 pont)

Megoldás:

a) A mértani sorozat elemeit jelöljük $a_1; a_2; a_3; ...$-val, a számtani sorozat elemeit pedig rendre $b_1; b_2; b_3; ...$-mal.

Írjuk fel az alábbi összefüggést a két sorozat tagjai között:

$a_1 + 2 = b_1$

$a_2 + 12 = b_2$ (1 pont)

$a_3 + 6 = b_3$

A számtani sorozat első és harmadik tagját írjuk fel a második tag és a differencia segítségével.

$b_2 - d + b_2 + b_2 + d = 52 + 2 + 12 + 6$ (1 pont)

$3 \cdot b_2 = 72 \Rightarrow b_2 = 24$ (1 pont)

A mértani sorozatban az első és a harmadik tag mértani közepe a második tag: $a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$

Helyettesítsük be a számtani sorozat megfelelő tagjait.

$b_2 - 12 = \sqrt{(b_1 - 2) \cdot (b_3 - 6)}$ (1 pont)

$24 - 12 = \sqrt{(24 - d - 2) \cdot (24 + d - 6)}$

$0 = d^2 - 4d - 252 \Rightarrow d_{1,2} = 18 \text{ és } -14$, ebből a -14 nem jó megoldás, mivel növekvő sorozatokról beszélünk. (2 pont)

$b_1 = 24 - 18 = 6 \Rightarrow a_1 = 6 - 2 = 4$

$b_2 = 24 \Rightarrow a_2 = 12$

$b_3 = 24 + 18 = 42 \Rightarrow a_3 = 42 - 6 = 36$ (1 pont)

Az ismert tagokból számoljuk ki a kvócienst: $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = 3$ (1 pont)

A mértani sorozat nyolcadik tagja: $a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 3^7 = 8748$ (1 pont)

Tehát 8 748 eurót lehet nyerni a nyolcadik körben.

b) Komplementerrel számolva: a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál.

$P(7 \text{ db fej és } 0 \text{ db írás}) + P(0 \text{ db fej és } 7 \text{ db írás}) \Rightarrow 2 \cdot \binom{7}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64}$ (1 pont)

$P(6 \text{ db fej és } 1 \text{ db írás}) + P(1 \text{ db fej és } 6 \text{ db írás}) \Rightarrow 2 \cdot \binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{7}{64}$ (1 pont)

$P(\bar{A}) = \frac{1+7}{64} = 0{,}125 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}875$ (1 pont)

Tehát **0,875 a valószínűsége**, hogy nyerünk. (1 pont)

Összesen: 13 pont

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Adott a $2^{7n+3}+3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}$ kifejezés.

a) Bizonyítsa (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy a kifejezés minden nemnegatív egész *n* esetén osztható 23-mal! (9 pont)

Év elején Péter felvesz a banktól 1 500 000 forintot évi 8%-os kamatra. A törlesztőrészlet minden évben azonos összeg, kezdve a következő év első napjától. Az éves felhalmozódott kamatot a bank mindig az adott év végén írja hozzá a tartozáshoz, és az adott évi törlesztőrészletet a már kamattal megnövelt értékből vonja le.

b) Hány év múlva fizeti vissza Péter a felvett összeget, ha évente 200 000 forintot töröleszt? (7 pont)

Megoldás:

a) A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el.

$n=1$-re igaz az állítás, mivel $2^{7+3}+3^{2+1}\cdot 5^{4+1}=85399$, ami osztható 23-mal. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az állítás egy $n=k$ pozitív egész számra teljesül,

azaz $23 \mid 2^{7k+3}+3^{2k+1}\cdot 5^{4k+1}$. (1 pont)

Ekkor igazolnunk kell, hogy a tulajdonság $n=k+1$-re is öröklődik, tehát a $2^{7(k+1)+3}+3^{2(k+1)+1}\cdot 5^{4(k+1)+1}$ kifejezés is osztható 23-mal. (1 pont)

$2^{7k+7+3}+3^{2k+2+1}\cdot 5^{4k+4+1}=2^7\cdot 2^{7k+3}+3^2\cdot 3^{2k+1}\cdot 5^4\cdot 5^{4k+1}=128\cdot 2^{7k+3}+5625\cdot 3^{2k+1}\cdot 5^{4k+1}$ (2 pont)

Emeljük ki az eredeti kifejezést!

$128\cdot\left(2^{7k+3}+3^{2k+1}\cdot 5^{4k+1}\right)+5497\cdot 3^{2k+1}\cdot 5^{4k+1}$ (1 pont)

A $128\cdot\left(2^{7k+3}+3^{2k+1}\cdot 5^{4k+1}\right)$ kifejezés az indukciós feltétel miatt osztható 23-mal. (1 pont)

A $5497\cdot 3^{2k+1}\cdot 5^{4k+1}$ szorzatban az 5497 osztható 23-mal, és ha a szorzat egyik tényezője osztható 23-mal, akkor a teljes szorzat is osztható lesz. (1 pont)

Mivel az összeg mindkét tagja osztható 23-mal, így az egész kifejezés osztható lesz. (1 pont)

Ezzel az állítást igazoltuk.

b) Írjuk fel a kölcsön kamatozását és törlesztését az első három évre!

Első év: $1\,500\,000\cdot 1{,}08-200\,000$

Második év: $1\,500\,000\cdot 1{,}08^2-200\,000\cdot 1{,}08-200\,000$

Harmadik év: $1\,500\,000\cdot 1{,}08^3-200\,000\cdot 1{,}08^2-200\,000\cdot 1{,}08-200\,000$

Ez alapján az *n*-edik év:

$1\,500\,000\cdot 1{,}08^n-200\,000\cdot 1{,}08^{n-1}-200\,000\cdot 1{,}08^{n-2}-\ldots-200\,000\cdot 1{,}08-200\,000=0$

$\Rightarrow 1\,500\,000\cdot 1{,}08^n=200\,000\cdot\left(1{,}08^{n-1}+1{,}08^{n-2}+\ldots+1{,}08+1\right)$ (2 pont)

A zárójelben egy olyan mértani sorozat első *n* tagjának összege szerepel, melynek első eleme $a_1=1$ és kvóciense $q=1{,}08$. Írjuk fel rá a mértani sorozat összegképletét! (1 pont)

$1\,500\,000\cdot 1{,}08^n=200\,000\cdot\dfrac{1{,}08^n-1}{1{,}08-1}$ (1 pont)

$\frac{1\,500\,000 \cdot 0,08}{200\,000} \cdot 1,08^n = 1,08^n - 1 \Rightarrow 1 = 0,4 \cdot 1,08^n \Rightarrow 2,5 = 1,08^n$ (1 pont)

Vegyük mindkét oldalnak tízes alapú logaritmusát!

$\lg 2,5 = \lg 1,08^n \Rightarrow \lg 2,5 = n \cdot \lg 1,08$ (1 pont)

$n = \frac{\lg 2,5}{\lg 1,08} = 11,9 \approx 12$ (1 pont)

Tehát **12 év alatt** tudja Péter visszafizetni az összeget.

Összesen: 16 pont

6. A tavasz közeledtével Anna cserepes virágokat vásárol és kihelyezi őket az ablakpárkányra egy sorba. Kedvencéből, az orchideából négyet vett, ezen kívül három tulipánt és két nárciszt.

a) Hányféleképpen helyezheti el a virágokat az ablakpárkányon, ha azt szeretné, hogy egyik nárcisz se kerüljön tulipán mellé (de az ugyanolyan fajtájú virágok, pl. nárcisz a nárcisz mellé kerülhet)? (11 pont)

Anna, bár nagyon szereti a virágokat, annyira nem ért a gondozásukhoz, így az esetek nyolcvan százalékában túllocsolja őket. Szerencsére pár növény jól bírja ezeket a körülményeket, a túllocsoltak 25%-a még így is életben marad, míg a megfelelő mennyiségű vizet kapó virágok 60%-a nem hervad el.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy virága túl lett öntözve, ha az nem hervadt el? (5 pont)

Megoldás:

a) A négy orchideát letesszük az ablakpárkányra, és a közöttük fennmaradó öt helyre rakjuk a többi virágot. (1 pont)

I. eset: A három tulipán egymás mellé kerül.

Az orchideák között kiválasztom a helyüket, ezt $\binom{5}{1}$ féleképpen tehetem meg. (1 pont)

A maradék négy "lyukba" kerülhetnek a nárciszok.

Ha a két nárcisz egymás mellé kerül, akkor $\binom{4}{1}$ féleképpen választhatom ki a helyüket, ha nem egymás mellé, akkor $\binom{4}{2}$ féleképpen. (1 pont)

Összesítve: $\binom{5}{1} \cdot \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\right] = 5 \cdot (4+6) = 50$ eset. (1 pont)

II. eset: Két tulipán egymás mellé kerül, a harmadik külön.

Az orchideák közé $2 \cdot \binom{5}{2}$ féleképpen helyezhetem el így a tulipánokat. (1 pont)

Az így fennmaradó három üres helyre teszem a két nárciszt, vagy egymás mellé, vagy külön. (1 pont)

Összesítve: $2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \left[\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right] = 20 \cdot (3+3) = 120$ eset. (1 pont)

III. eset: Egy tulipán se kerül a másik mellé.

Az előző esetek logikáját követve a tulipánokat $\binom{5}{3}$ féleképpen helyezhetem le, a fennmaradó két helyre kerülnek a nárciszok. (2 pont)

Összesítve: $\binom{5}{3}\cdot\left[\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right]=10\cdot(1+2)=30$ eset. (1 pont)

Tehát összesen $50+120+30=$ **200 féleképpen** helyezheti el Anna a virágokat az ablakpárkányon. (1 pont)

b) Készítsünk táblázatot az események szorzatának valószínűségéről! (2 pont)

	A (túllocsolt)	B (elég vizet kap)
C (életben marad)	$0,8\cdot 0,25=0,2$	$(1-0,8)\cdot 0,6=0,12$
D (elhervad)	–	–

Helyettesítsünk be a feltételes valószínűség képletébe:

$$P(\text{túllocsolt}|\text{életben marad})=P(A|C)=\frac{P(A\cdot C)}{P(C)}$$ (1 pont)

$$=\frac{0,8\cdot 0,25}{0,8\cdot 0,25+0,2\cdot 0,6}=\frac{0,2}{0,32}=0,652$$ (1 pont)

Tehát **0,652 a valószínűsége,** hogy az életben maradt virág túl lett locsolva. (1 pont)

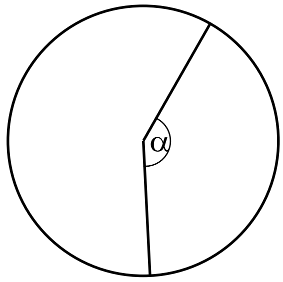
Összesen: 16 pont

7. Az iskolai sportnapon öt csapat nevez a focibajnokságra, ahol mindenki mindenkivel játszik egy meccset.

a) Bizonyítsa be, hogy bármikor is figyeljük meg a bajnokságot, lesz két csapat, akik pontosan ugyanannyi mérkőzést játszottak! (4 pont)

Az egyik osztályfőnök elhatározza, hogy kúp alakú csákókat készít a meccsre a szurkoló diákoknak.

b) Mekkora középponti szöggel tud egy 30 cm átmérőjű körlapból kivágni egy körcikket úgy, hogy az abból hajtogatott egyenes kúp alakú csákó térfogata maximális legyen? (12 pont)



Megoldás:

a) Indirekt módon végezzük el a bizonyítást. Tegyük fel, hogy minden csapat különböző számú meccset játszott. Ezt egy olyan ötpontú egyszerű gráfon tudjuk ábrázolni, ahol minden csúcs fokszáma különböző. (1 pont)
Az első lehetőség, hogy az első csúcsból egy él indul, a másodikból kettő stb.
Ekkor az ötödik csúcsból öt élnek kell indulnia, ez esetben pedig már nem egyszerű gráfról beszélünk. (1 pont)
Másik lehetőség, ha az első csúcs fokszáma nulla, a másodiké egy stb.
Ekkor az ötödik csúcs fokszáma négy, ami ellentmondáshoz vezet. (1 pont)
A megfelelő ábrákért is jár az 1-1 pont.
Beláttuk, hogy nem tudunk ilyen gráfot felrajzolni, tehát **az eredeti állítás igaz.** (1 pont)

b) A kúp keresztmetszetében az alkotó, a magasság és az alapkör sugara derékszögű háromszöget határoz meg. Fejezzük ki belőle a magasságot: $m=\sqrt{a^2-r^2}$ (1 pont)

Helyettesítsük be a kúp térfogatának képletébe!

$$V(r)=\frac{m\cdot r^2\pi}{3}\Rightarrow\frac{r^2\pi\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{3}$$ (1 pont)

Az eredeti körünk sugara megegyezik a kúp alkotójával, ami $30:2=15$ cm hosszú. (1 pont)

A $V(r)=\dfrac{r^2\pi\cdot\sqrt{15^2-r^2}}{3}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált értéke 0.

$$V(r)'=\left(\frac{r^2\pi\cdot\sqrt{15^2-r^2}}{3}\right)'=\frac{\pi}{3}\cdot\left(r^2\cdot\sqrt{15^2-r^2}\right)'=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\sqrt{225r^4-r^6}\right)'$$ (2 pont)

A gyökös kifejezés akkor és csak akkor maximális, ha a gyök alatti kifejezés maximális.

$$\left(225r^4-r^6\right)'=900r^3-6r^5=r^3\cdot\left(900-6r^2\right)$$ (1 pont)

Egy szorzat akkor 0, ha valamely tényezője 0, tehát: $r_1=0;\ r_2=5\sqrt{6};\ r_3=-5\sqrt{6}$. (1 pont)

Ebből a 0 és a $-5\sqrt{6}$ nem jó megoldások, mivel a sugár hossza egy pozitív szám kell, hogy legyen. (1 pont)

Vizsgáljuk meg a függvény konvexitását a második derivált segítségével!

$$V(r)''=\left(225r^4-r^6\right)''=2700r^2-30r^4$$

$$V\left(5\sqrt{6}\right)''=2700\cdot\left(5\sqrt{6}\right)^2-30\left(5\sqrt{6}\right)^4=-270\,000$$ (1 pont)

Mivel a második derivált az $5\sqrt{6}$ pontban negatív, a függvény ebben a pontban konkáv, tehát helyi maximuma van.

Alternatív módszer:

x	$x<5\sqrt{6}$	$x=5\sqrt{6}$	$5\sqrt{6}<x$
$f'(x)$	pozitív	0	negatív
$f(x)$	növekvő	helyi maximum	csökkenő

Az eredeti körből kivágott körcikk területe megegyezik a kúp palástjának felszínével.

$$T_{\text{körcikk}}=T_{\text{palást}}\Rightarrow\frac{r_{\text{körcikk}}^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360°}=r_{\text{kúp alapköre}}\cdot\pi\cdot a$$ (1 pont)

Helyettesítsük be a kiszámolt értékeket!

$$\frac{15^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360°}=5\sqrt{6}\cdot\pi\cdot 15$$ (1 pont)

$$\alpha=\frac{5\sqrt{6}}{15}\cdot 360°=293{,}94°$$

Tehát a maximális térfogatú csákóhoz **293,94° -os középponti szögű körcikket** kell a tanárnak kivágnia. (1 pont)

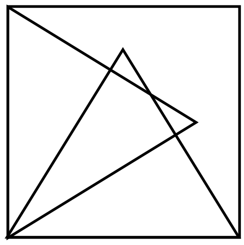
Összesen: 16 pont

8. A megyei tornaverseny döntőjébe jutó hat lánynak megmérték a magasságát, és minden mért eredményt egészre kerekítettek. A magasságok mediánja 163 cm, két módusza 163 és 167 cm, a terjedelem pedig 10 cm.

a) Mik lehettek a lányok pontos magasságai, ha az átlag 162 és 163 cm közé esett?

(6 pont)

A győztes lány tornaklubjának logója a következő ábrán látható négyzet, amelyben két szabályos háromszöget helyeztek el a négyzet egy-egy szomszédos oldalára.



b) Adja meg a logón a kétszeresen lefedett és az üresen maradt terület arányát, ha a négyzet területe 324 cm². **(10 pont)**

Megoldás:

a) Páros elemszámnál a medián a sorbarendezés utáni két középső tag átlaga, így a harmadik és a negyedik szám 163 lesz.

A magasságok sorrendben: $X_1;\ X_2; 163; 163;\ X_3;\ X_4$ (1 pont)

Mivel a 163 és a 167 a minta két módusza, ezeknek gyakorisága megegyező, ez alapján a magasságok: $X_1;\ X_2; 163; 163; 167; 167$. (1 pont)

Ha a legnagyobb érték a 167, és a terjedelem 10, akkor a legkisebb érték $167 - 10 = 157$.

(1 pont)

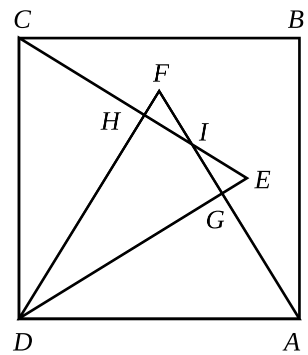
Az átlag segítségével számoljuk ki az X_2 lehetséges értékeit!

$162 < \dfrac{157 + X_2 + 163 + 163 + 167 + 167}{6} < 163 \Rightarrow 155 < X_2 < 161$ (1 pont)

Mivel 157 a legalacsonyabb érték, ezért a lehetséges megoldások: $X_2 = 158; 159; 160$ (1 pont)

Tehát a lányok magasságai: **157; 158 / 159 / 160; 163; 163; 167; 167** (1 pont)

b) Ha a négyzet területe $324\ \text{cm}^2$, akkor az oldalai $\sqrt{324} = 18\ \text{cm}$ hosszúságúak. (1 pont)



Az AGD_Δ és CHD_Δ egybevágó, derékszögű háromszögek, így a befogók $CH = AG = \sin 30^\circ \cdot 18 = 9\ \text{cm}$ és $DH = DG = \sin 60^\circ \cdot 18 = = 9\sqrt{3}\ \text{cm}$ hosszúak. (1 pont)

Jelöljük T_1-gyel az AGD_Δ és CHD_Δ háromszögek területét.

Ekkor $T_1 = \dfrac{9 \cdot 9\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 81\sqrt{3} = 140,2961\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Az FHI_Δ és EGI_Δ is egybevágó, derékszögű háromszögek, így a befogóik:

$HF = GE = 18 - 9\sqrt{3} = 2,4115\ \text{cm}$ és $HI = GI = \text{tg}60^\circ \cdot 2,412 = 4,1769\ \text{cm}$ (2 pont)

Jelöljük T_2-vel az FHI_Δ és EGI_Δ háromszögek területét.

Ekkor $T_2 = \dfrac{2,4115 \cdot 4,1769}{2} \cdot 2 = 10,0726\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Számoljuk ki a kétszeresen lefedett rész, azaz $DGIH$ négyszög területét!

$T_3 = T_{DGIH} = T_{AFD} - \dfrac{T_1}{2} - \dfrac{T_2}{2} = \dfrac{18^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} - \dfrac{81\sqrt{3}}{2} - \dfrac{10,0726}{2} = 65,1118\ \text{cm}^2$ (1 pont)

Jelöljük T_4-gyel az üresen maradt részt, ennek területe $T_\square - (T_1 + T_2 + T_3)$.

$T_4 = 324 - (140,2961 + 10,0726 + 65,1118) = 108,5195\ \text{cm}^2$ (1 pont)

A kétszeresen lefedett és az üresen maradt terület aránya: $\dfrac{T_4}{T_3} = \dfrac{108,5195}{65,1118} = 1,67$ (1 pont)

Tehát a keresett arány **1,67.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy parkon áthaladó sétány és az azt keresztező futópálya közé eső füves területre szobrot szeretne állítani a helyi önkormányzat. A két út vonala és egymáshoz viszonyított helyzete a két alábbi függvénnyel leírható:

$$f(x) = -(x-5)^2 + 10$$

$$g(x) = -x + 9$$

a) Mekkora a két út által közbezárt füves rész területe? (7 pont)

A szobor méreteit a tervező derékszögű koordinátarendszerben vázolja fel. A kör alakú talapzat körvonalának két pontja $P(4;6)$ és $Q(5,6;6,4)$.

b) Határozza meg a körvonal az egyenletét, ha a két pont által meghatározott szakasz a talapzat átmérője! (4 pont)

A parki sétány mellett kihelyezett táblákon az arra járók a helyi növényekről és állatokról szóló érdekességeket olvashatnak. A táblák alakja egy olyan háromszög, melynek területe $3\sqrt{15}$ dm² és oldalai $2:3:4$ arányúak.

c) Milyen hosszúak a tábla oldalai? (5 pont)

Megoldás:

a) Tegyük egyenlővé a két egyenletet, hogy megkapjuk a metszéspontokat!

$-(x-5)^2 + 10 = -x + 9$ (1 pont)

$0 = x^2 - 11x + 24 \Rightarrow x_1 = 3$ és $x_2 = 8$ (1 pont)

(Ha a metszéspontokat a két egyenletet közös koordináta-rendszerben való ábrázolásával kapta meg, ugyanúgy jár érte a 2 pont.)

A két függvény közti terület a függvények különbségének határozott integráltjával számolható ki.

$\int_3^8 \left(-(x-5)^2 + 10 - (-x+9)\right)dx = \int_3^8 \left(-x^2 + 11x - 24\right)dx$ (2 pont)

Használjuk a Newton-Leibniz formulát a határozott integrál kiszámításához!

$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 24x\right]_3^8 = -\frac{8^3}{3} + \frac{11\cdot 8^2}{2} - 24\cdot 8 - \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{11\cdot 3^2}{2} - 24\cdot 3\right) = -\frac{32}{3} + \frac{63}{2}$ (2 pont)

Tehát a függvények közti terület **20,83 területegység.** (1 pont)

b) PQ szakasz felezőpontja a kör közepe.

$O\left(\frac{4+5,6}{2};\frac{6+6,4}{2}\right) \Rightarrow O(4,8;6,2)$ (2 pont)

OP távolsága a kör sugara.

$|OP| = \sqrt{(4-4,8)^2 + (6-6,2)^2} = 0,82$ (1 pont)

Helyettesítsünk be a kör egyenletébe!

$k: (x-4,8)^2 + (y-6,2)^2 = \mathbf{0,68}$ (1 pont)

c) Az arányok ismeretében a háromszög oldalai $a = 2x$, $b = 3x$ és $c = 4x$. (1 pont)

A háromszög félkerülete: $s = \frac{2x+3x+4x}{2} = 4,5x$ (1 pont)

Alkalmazzuk a Hérón-képletet!

$T = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \Rightarrow 3\sqrt{15} = \sqrt{4,5x\cdot 2,5x\cdot 1,5x\cdot 0,5x}$ (1 pont)

$3\sqrt{15} = \sqrt{8,4375\cdot x^4} \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$, azonban a a -2 nem megoldás. (1 pont)

Tehát a tábla oldalai **4, 6 és 8 dm hosszúak.** (1 pont)

Összesen:16 pont

A szerezhető maximális pontszám: 115 pont