

MATEMATIKA
EMELT SZINTŰ
PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

2020. február 15.

Az írásbeli próbavizsga időtartama: 240 perc

Kérjük, nyomtatott nagy betűkkel töltsse ki!

Név	
E-mail cím	
SG-s szombati tanítás teremszáma	
Pontszám	

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA SZEKCIÓ

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.



4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (\sin , \cos , tg , \log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy a **szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. András és Béla televíziót szeretnének vásárolni és már ki is választottak egyet, de jelenleg egyiküknek sem elég rá a félretett pénze, Andrásnak még a tévé árának 25%-a hiányzik. Pár nappal később Béla elsétál a bolt mellett és észreveszi, hogy a készülék árát 10%-kal csökkentették, de még így se tudja megvenni, félretett pénzének a fele a hiányzó összeg. Egy héttel később úgy döntenek, hogy közösen ruháznak be a tévére, el is mennek megvenni, azonban szomorúan látják, hogy időközben 10%-kal újra felemelték az árat. Ekkor azonban már nem akarnak tovább várni, megveszik a kiszemelt darabot és együtt 57 600 forintjuk marad.

- a) Hány forintjuk maradt volna összesen, ha még az árváltozások előtt megveszik közösen a tévét?

A boltban 84 televízió van raktáron, de ezeknek hatoda szállítás közben megsérült.

- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha ezen a héten 15 tévét adnak el, abból háromnál több rossz lesz? Válaszát két tizedesjegy pontossággal adja meg!

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{\log_x 6x} \cdot \log_6 x = \sqrt{2}$

Igazolja, hogy az alábbi kifejezés minden x és y valós számpárra teljesül!

b) $\sin x \cdot \sin(x + y) + \cos x \cdot \cos(x + y) = \cos y$

a)	9 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	14 pont	

3. A Kisédes nevű cukrászda minden évben ünnepséget tart a bolt születésnapja alkalmából, és ennek keretein belül különleges akciókkal és finomságokkal kedveskednek a vevőknek.
- a) Az alapítás hányadik évfordulóját ünnepelhetik idén, ha tudjuk, hogy ez egy olyan kétjegyű szám, amelyben a számjegyek szorzata 15-tel kisebb a cukrászda jelenlegi koránál és a cukrászda még nem élt meg fél évszázadot?

Az ünnepség napján egy újfajta csokis-marcipános tortával is meglepik a vendégeket. A sütemény egy rombusz alapú egyenes hasáb, melynek tetejét egy marcipán kör díszíti. A marcipán réteg a rombusz mind a négy oldalát érinti, és a rombusz hosszabbik átlója négyszerese a kör sugarának.

- b) Fejezze ki a rombusz területét a sugár függvényében!

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

4. Egy félkarú rablón a nyeremények összege mértani sorozatként nő minden egyes fordulóban. Ennek a mértani sorozatnak az első három tagjának összege 52 euró. Ha az első három taghoz rendre kettő, tizenkettő és hat eurót adunk hozzá, akkor az így keletkezett számok egy számtani sorozat három egymást követő tagjai lesznek.

a) Mennyi pénzt nyerhetünk a 8. fordulóban?

Egy másik fajta játékban egy pénzérmét dobunk fel hétszer egymás után és rögzítjük az eredményeket. A kört akkor nyerjük meg, ha a fejek és irások számának különbsége nem nagyobb háromnál.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyerünk ezen a játékon?

a)	9 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Adott a $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ kifejezés.

- a) Bizonyítsa (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy a kifejezés minden nemnegatív egész n esetén osztható 23-mal!

Év elején Péter felvesz a banktól 1 500 000 forintot évi 8%-os kamatra. A törlesztőrészlet minden évben azonos összeg, kezdve a következő év első napjától. Az éves felhalmozódott kamatot a bank mindig az adott év végén írja hozzá a tartozáshoz, és az adott évi törlesztőrészletet a már kamattal megnövelt értékből vonja le.

- b) Hány év múlva fizeti vissza Péter a felvett összeget, ha évente 200 000 forintot törleszt?

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

6. A tavasz közeledtével Anna cserepes virágokat vásárol és kihelyezi őket az ablakpárkányra egy sorba. Kedvencéből, az orchideából négyet vett, ezen kívül három tulipánt és két nárciszt.

- a) Hányféleképpen helyezheti el a virágokat az ablakpárkányon, ha azt szeretné, hogy egyik nárcisz se kerüljön tulipán mellé (de az ugyanolyan fajtájú virágok, pl. nárcisz a nárcisz mellé kerülhet)?

Anna, bár nagyon szereti a virágokat, annyira nem ért a gondozásukhoz, így az esetek nyolcvan százalékában túllocsolja őket. Szerencsére pár növény jól bírja ezeket a körülményeket, a túllocsoltak 25%-a még így is életben marad, míg a megfelelő mennyiségű vizet kapó virágok 60%-a nem hervad el.

- b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy virága túl lett öntözve, ha az nem hervadt el?

a)	11 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

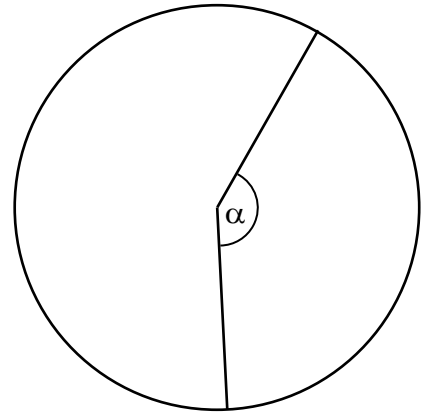
Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!

7. Az iskolai sportnapon öt csapat nevez a focibajnokságra, ahol mindenki mindenkiel játszik egy meccset.

a) Bizonyítsa be, hogy bármikor is figyeljük meg a bajnokságot, lesz két csapat, akik pontosan ugyanannyi mérkőzést játszottak!

Az egyik osztályfőnök elhatározza, hogy kúp alakú csákókat készít a meccsre a szurkoló diákoknak.

b) Mekkora középponti szöggel tud egy 30 cm átmérőjű körlepből kivágni egy körcikket úgy, hogy az abból hajtogatott egyenes kúp alakú csákó térfogata maximális legyen?



a)	4 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	16 pont	

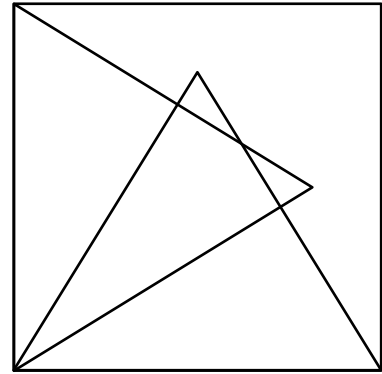
**Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

8. A megyei tornaverseny döntőjébe jutó hat lánynak megmérték a magasságát, és minden mért eredményt egészre kerekítettek. A magasságok mediánja 163 cm, két módusza 163 és 167 cm, a terjedelem pedig 10 cm.

- a) Mik lehettek a lányok pontos magasságai, ha az átlag 162 és 163 cm közé esett?

A győztes lány tornaklubjának logója a következő ábrán látható négyzet, amelyben két szabályos háromszöget helyeztek el a négyzet egy-egy szomszédos oldalára.

- b) Adja meg a logón a kétszeresen lefedett és az üresen maradt terület arányát, ha a négyzet területe 324 cm^2 .



a)	6 pont	
b)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Egy parkon áthaladó sétány és az azt keresztező futópálya közé eső füves területre szobrot szeretne állítani a helyi önkormányzat. A két út vonala és egymáshoz viszonyított helyzete a két alábbi függvénnyel leírható:

$$f(x) = -(x-5)^2 + 10$$

$$g(x) = -x + 9$$

- a) Mekkora a két út által közbezárt füves rész területe?

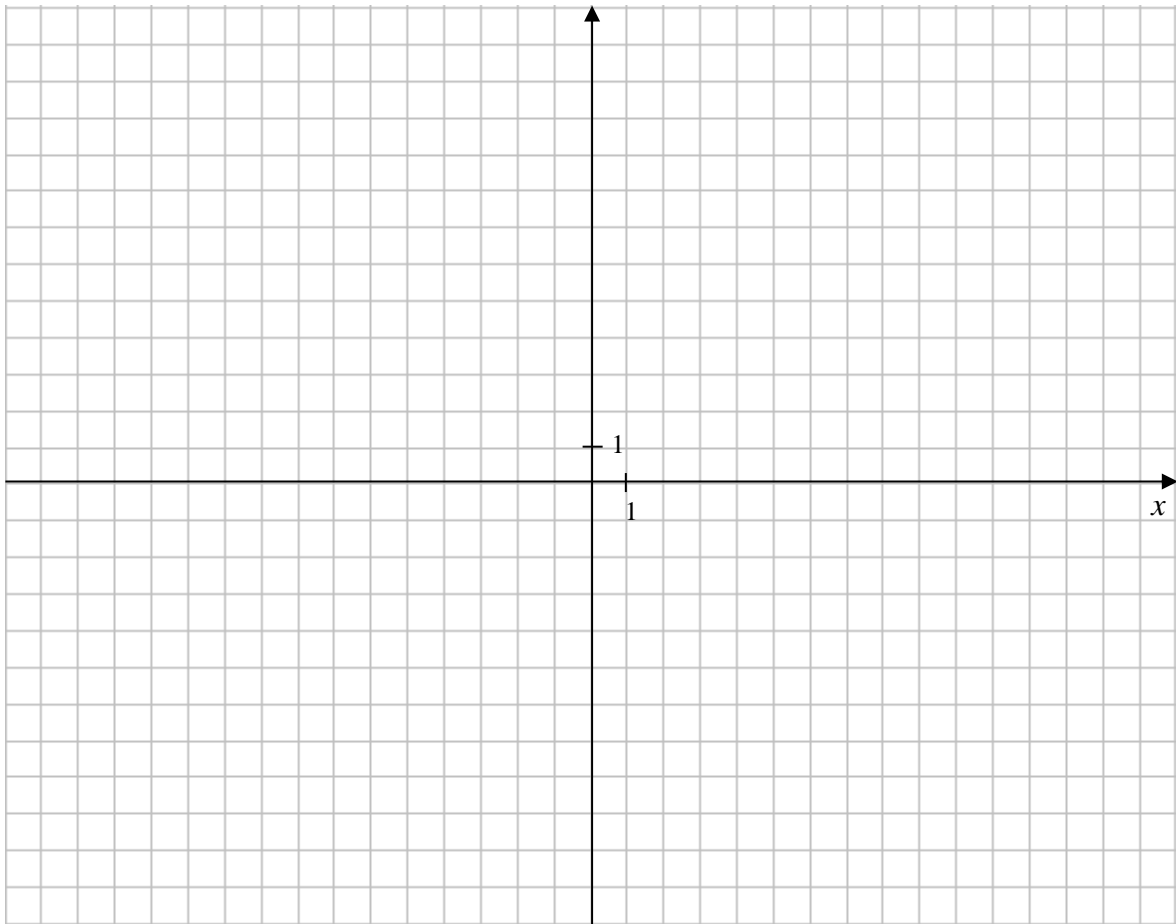
A szobor méreteit a tervező derékszögű koordinátarendszerben vázolja fel. A kör alakú talapzat körvonalának két pontja $P(4;6)$ és $Q(5,6;6,4)$.

- b) Határozza meg a körvonal egyenletét, ha a két pont által meghatározott szakasz a talapzat átmérője!

A parki sétány mellett kihelyezett táblákon az arra járók a helyi növényekről és állatokról szóló érdekességeket olvashatnak. A táblák alakja egy olyan háromszög, melynek területe $3\sqrt{15} \text{ dm}^2$ és oldalai $2:3:4$ arányúak.

- c) Milyen hosszúak a tábla oldalai?

a)	7 pont	
b)	4 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	



	feladat sorszám	maximális pontszám	elért pontszám	maximális pontszám	elért pontszám
I. rész	1.	12		51	
	2.	14			
	3.	12			
	4.	13			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli próbavizsga pontszáma				115	

javító tanár