PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2018. február 10.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

Javítási útmutató

2018. február 10.

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA SZEKCIÓ

1)

a) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}\geq\frac{\lg 4}{\lg 8}$$ **(5 pont)**

b) Adja meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát a $[0;2\pi[$ intervallumon!

$$\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$ **(4 pont)**

Jelölje *A* az a), *B* a b) feladat megoldásainak halmazát.

c) Intervallumok segítségével adja meg az $\overline{A}\setminus B$ halmazt! (3 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlőtlenség bal oldalát átalakíthatjuk azonos alapú hatványokká: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x}\geq\frac{\lg 4}{\lg 8}$

(1 pont)

Az egyenlőtlenség jobb oldala átalakítható a következő módon: $\frac{2\lg 2}{3\lg 2}$, ezt egyszerűsítve a következő egyenlőtlenséget kapjuk: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x}\geq\frac{2}{3}$ (1 pont)

A bal oldalon az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot alkalmazva: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}\geq\frac{2}{3}$ (1 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $3-x\leq 1$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $\boldsymbol{x\in[2;\infty[}$ (1 pont)

b) Mivel négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért $\sin x\geq 0$. (0,5 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása a $[0;2\pi[$ intervallumon $x\in[0;\pi]$. (1 pont)

Egy tört nevezője nem lehet 0, ezért $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$. (0,5 pont)

Az egyenlet megoldása a $[0;2\pi[$ intervallumon $x_1\neq\frac{3\pi}{4}$ és $x_2\neq\frac{7\pi}{4}$. (1 pont)

Összeegyeztetve a kikötéseket, a kifejezés értelmezési tartománya a $[0;2\pi[$ intervallumon $\boldsymbol{x\in\left\{[0;\pi]\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}\right\}}$. (1 pont)

c) A feladat szövege szerint $A=[2;\infty[$, $B=\left\{[0;\pi]\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}\right\}$.

Az $\overline{A}\setminus B$ intervallum azokat az elemeket tartalmazza, amelyek nem elemei *A*-nak, és nincsenek benne a *B* intervallumban sem. (1 pont)

Ezek alapján $\boldsymbol{\overline{A}\setminus B=]-\infty;0[}$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

2) Tapasztalatok alapján annak a valószínűsége, hogy egy teljesítménytúrán egy véletlenszerűen kiválasztott versenyző megtalálja a 3-as számú ellenőrzési pontot 0,65. A mostani kihíváson 15 túrázó vesz részt.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a túrán legalább 2 résztvevő nem találja meg az ellenőrzési pontot? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

A 3-as pont egy fennsíkon álló kilátót jelöl, továbbá a fennsíkon két tűzrakóhely is található. Jelölje a tűzrakóhelyeket az *A* és a *B* pont. Az *A* pont és a kilátó távolsága 100 méter, a kilátó csúcspontja az *A* pontból 45°-os, a *B* pontból 30°-os emelkedési szögben látszik. Az *A* pontot a kilátó talppontjával összekötő egyenes 60°-os szöget zár be az *AB* egyenessel.

b) Milyen messze van egymástól a két tűzrakóhely? (9 pont)

Megoldás:

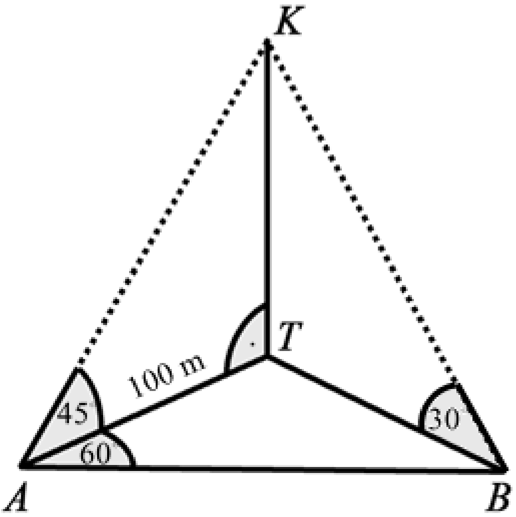
a) Annak a valószínűsége, hogy valaki megtalálja az ellenőrzési pontot $p = 0,65$, így annak a valószínűsége, hogy valaki nem találja meg $q = 0,35$. (1 pont)

Számoljuk ki az esemény komplementerének valószínűségét, azaz, hogy legfeljebb egy ember nem találja meg a hármas pontot. (1 pont)

$$P\left(\overline{A}\right) = \binom{15}{0} \cdot 0,65^{15} \cdot 0,35^{0} + \binom{15}{1} \cdot 0,65^{14} \cdot 035 = 0,0142$$ (1 pont)

Így annak a valószínűsége, hogy legalább ketten nem találják meg az ellenőrzési pontot $1 - P\left(\overline{A}\right) = \mathbf{0,9858}$ (1 pont)

b) Ábra készítése (2 pont)



Az *ATK* háromszög derékszögű, egyik hegyesszöge 45°, ezért a háromszög egyenlőszárú. (1 pont)

Így $TK = 100\ \text{m}$. (1 pont)

A *BTK* háromszög szintén derékszögű, felírható rá a következő összefüggés: $\text{tg}\,30^\circ = \dfrac{100}{TB}$. (1 pont)

Ebből $TB = 173,21\ \text{m}$. (1 pont)

Az *ABT* háromszögben koszinusztétel segítségével kiszámolhatjuk az *AB* távolságot.

$173,21^2 = 100^2 + AB^2 - 2 \cdot 100 \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$

$\Rightarrow\ 0 = AB^2 - 100AB - 20000$ (1 pont)

Az egyenlet két gyöke: 200 és -100. A negatív gyök a feladat jellegéből adódóan nem megoldás. (1 pont)

Tehát a két tűzrakóhely távolsága **200 méter**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

3) Egy konferencián nők és férfiak vesznek részt. Tudjuk, hogy több nő van jelen, mint férfi és összesen 36-an vannak a konferencián. Érkezéskor mindenki mindenkit üdvözöl: a nők puszit adnak egymásnak, a férfiak kezet fognak egymással, a nőknek a férfiak kezet csókolnak.

a) Hány kézfogás történt, ha 323 kézcsókra került sor? (5 pont)

Az elhangzott előadások után a résztvevők 9 fős csoportokra oszlanak, hogy megvitassák a hallottakat. Az egyik csoportban megkérdezték, hogy a konferencia előtt ki hány embert ismert a csoporttársai közül. A válaszok a következők voltak: 1 fő mondott 5-öt, 3 fő 2-t, 2 fő 3-at, 2 fő 4-et és 1 fő 1-et.

b) Hányféleképp választhatunk ki a csoportból 2 főt úgy, hogy ők korábban még nem ismerték egymást? (3 pont)

Ákos a többi csoportról a következőket állította:

- **Van olyan csoport, ahol mindenki pontosan 7 embert ismert korábban.**
- **Van olyan csoport, ahol pontosan 38 ismeretség volt korábban.**

c) Döntse el, hogy lehet-e igaza Ákosnak! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

a) Jelölje a nők számát x, a férfiak számát y, ahol $x > y$.
A konferencián összesen 36-an vannak, ezért $x + y = 36$. (1 pont)
Összesen 323 kézcsók történt, ezért $xy = 323$. (1 pont)
Az első egyenletből kifejezve: $x = 36 - y$, ezt a második egyenletbe behelyettesítve adódik a következő másodfokú egyenlet: $0 = y^2 - 36y + 323$. (1 pont)
Így a gyökök: $y_1 = 19,\ x_1 = 17$ valamint $y_2 = 17,\ x_2 = 19$. Az első gyökpár nem megoldása a feladatnak, mivel tudjuk, hogy a nők voltak többen a konferencián. (1 pont)
A résztvevők között 17 férfi volt, így a kézfogások száma $\frac{17 \cdot 16}{2} = \mathbf{136}$. (1 pont)

b) Ebben a csoportban az ismertségek száma $\frac{5 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1}{2} = 13$ (1 pont)
Egy 9 fős társaságban összesen $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ ismertség állhat fenn. (1 pont)
A fentiek alapján ebben a csoportban $36 - 13 = 23$ olyan páros van, akik nem ismerik egymást, tehát **23 féleképpen** választhatunk ki két embert úgy, hogy ők korábban még nem ismerték egymást. (1 pont)

c) Az első esetben az ismertségeket ábrázolhatjuk egy olyan gráfon, ahol minden pont fokszáma 7. Ekkor a gráfban a fokszámok összege 63. (1 pont)
Mivel egy gráfban a fokszámok összege mindig páros, ezért ebben az esetben Ákosnak **nem lehet igaza**. (1 pont)
A második esetben tudjuk, hogy egy 9 fős társaságban összesen 36 ismertség állhat fenn. (1 pont)
Ezért Ákosnak **nem lehet igaza**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Az $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ függvényről az alábbiakat tudjuk:

- **A függvény egyetlen zérushelye $x=-1$.**
- **A függvény két szélsőértéke az $x=1$ és $x=3$ helyeken van.**
- **A függvény értéke az $x=2$ helyen 18.**

a) Adja meg az $f(x)$ függvény *a, b, c, d* paramétereit! (9 pont)

Adott a $g(x)=x^3-1{,}5x^2-6x$ függvény.

b) Határozza meg a $g(x)$ függvény konvexitását, valamint inflexiós pontját! (5 pont)

Megoldás:

a) A függvény egyetlen zérushelye $x=-1$, ebből felírhatjuk a következő egyenletet: $-a+b-c+d=0$ (I.) (1 pont)

Abban a pontban, ahol egy függvénynek szélsőértéke van, ott az első derivált értéke nulla. $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ (1 pont)

A fentiek alapján $3a+2b+c=0$ (II.), valamint $27a+6b+c=0$ (III.) (1 pont)

A függvény értéke az $x=2$ helyen 18, tehát $8a+4b+2c+d=18$ (IV.) (1 pont)

A (III.) egyenletből a (II.)-t kivonva adódik, hogy $b=-6a$ (1 pont)

Ezt a (II.) egyenletbe visszahelyettesítve $-9a+c=0 \Rightarrow c=9a$ (1 pont)

A fentiek alapján az (I.) egyenlet $-16a+d=0 \Rightarrow d=16a$ (1 pont)

A (IV.) egyenletet felírhatjuk a következő módon: $18a=18 \Rightarrow$ $\boldsymbol{a=1}$ (1 pont)

Visszahelyettesítve megkapjuk a többi paraméter értékét is: $\boldsymbol{b=-6,\ c=9,\ d=16}$. A függvény: $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$. (1 pont)

b) Egy függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol második deriváltjának értéke nulla. (1 pont)

$g'(x)=3x^2-3x-6 \Rightarrow g''(x)=6x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (1 pont)

Foglaljuk az adatokat táblázatba: (1 pont)

	$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$	$x=\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2};\infty\right[$
$g''(x)$	negatív	0	pozitív
$g(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

A második derivált értéke a $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ intervallumon negatív, ezért itt a függvény **konkáv**, az $\left]\frac{1}{2};\infty\right[$ intervallumon pozitív, ezért itt a függvény **konvex**. (1 pont)

Mivel az $x=\frac{1}{2}$ pontban a második derivált értéke 0, és a függvény görbületet vált, ezért az $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ **a függvény inflexiós pontja**. (1 pont)

Összesen: 14 pont

Maximális elérhető pontszám: 51 pont

5) Egy kisvárosi lottójátékon *n* db különböző nyerőszámot sorsoltak ki. A számok egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme 3, az elemek összege 93, a nyerőszámok reciprokainak összege pedig $\frac{31}{48}$.

a) Adja meg a lottón kisorsolt nyerőszámokat! (10 pont)

Tamás megnyerte a főnyereményt, 2865000 Ft-ot. A nyertes ezt az összeget 1 éven keresztül akarja kamatoztatni. Két kedvező ajánlatot kapott. A Fitying Bank a náluk elhelyezett összeg esetén 1 millió forintig 0,5%, az 1 millió feletti összegre 0,63% kamatot fizet havonta. A Peták Bank kéthavi lekötést ajánl kéthavi 1,4%-os kamatra.

b) Melyik ajánlatot válassza Tamás, ha célja, hogy 1 év múlva minél nagyobb összeggel támogathassa a családját? (6 pont)

Megoldás:

a) Jelölje a mértani sorozat hányadosát q.

Ekkor a sorozat első n elemének összege $S_n = 3 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 93 \ (\text{I.})$ (1 pont)

A nyerőszámok reciprokai egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme $\frac{1}{3}$, hányadosa $\frac{1}{q}$. (1 pont)

Ebben a sorozatban az első n elem összege $S_n' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{31}{48} \ (\text{II.})$ (1 pont)

Az (I.) egyenletből kifejezhetjük, hogy $q^n = 31q - 30$ (1 pont)

A (II.) egyenletbe visszahelyettesítve és átalakítva a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$q^2 - 3q + 2 = 0$ (2 pont)

Az egyenlet gyökei $q_1 = 1$ és $q_2 = 2$. (1 pont)

Mivel a lottón kihúzott számok nem lehetnek egyformák, ezért $q_1 = 1$ nem megoldás. (1 pont)

A fentiek alapján $q^n = 32 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$ (1 pont)

Az ismert adatok alapján meghatározhatóak a nyerőszámok, melyek: **3, 6, 12, 24 és 48.** (1 pont)

b) A Fitying Banknál egy év alatt összesen 12 kamatozási periódus telik le. (1 pont)

Így egy év múlva a felvehető összeg $1000000 \cdot 1{,}005^{12} + 1865000 \cdot 1{,}0063^{12} = 3072661{,}317$ Ft. (2 pont)

A Peták Banknál egy év alatt 6 lekötési periódus telik le. (1 pont)

Így egy év múlva a felvehető összeg: $2865000 \cdot 1{,}014^6 = 3114241{,}991$ Ft. (1 pont)

Tamásnak a **Peták Bankot kell választania**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Van kilenc számkártyánk: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A kártyákat négy csoportba rakjuk úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála nagyobb többszöröse.

a) Adjon meg egy lehetséges csoportosítást! (3 pont)

A számkártyák mindegyikének felhasználásával kilencjegyű számokat képzünk.

b) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok egymáshoz képest (nem szükségképpen egymás mellett) növekvő sorrendben helyezkednek el? (4 pont)

A számkártyák közé beteszünk még n db hármast. Ezután az összes lehetséges módon $n+9$ jegyű számokat képzünk, majd ezek közül tetszőlegesen kiválasztunk egyet. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható 4-gyel $\frac{2}{13}$.

c) Hány darab hármast tettünk be a számkártyák közé? (9 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Az 1-es számmal semmilyen más kártya nem kerülhet egy csoportba. (1 pont)
A 2, 4, 8 számkártyáknak külön csoportokban kell szerepelniük, a 6-os kártya nem szerepelhet együtt sem a kettessel, sem a hármassal, valamint a 3 és a 9 sem lehet együtt. (1 pont)
Egy lehetséges csoportosítás: $(1);\ (2, 3, 5);\ (4, 6, 7);\ (8, 9)$. (1 pont)

b) Először kiválasztjuk azt a három helyet, ahol az 1, 2, 3 számkártyák szerepelnek: $\binom{9}{3}$ (1 pont)
Ennek a három kártyának adott, növekvő sorrendben kell szerepelnie. (1 pont)
A maradék helyen a többi számkártyát 6! féleképpen tudjuk sorba rendezni. (1 pont)
Így összesen $\binom{9}{3}\cdot 1\cdot 6! = \mathbf{60480}$ **olyan számot tudunk képezni, amelyben az 1, 2, 3 számkártyák növekvő sorrendben helyezkednek el.** (1 pont)

c) Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből képezhető szám is osztható 4-gyel. Esetünkben ezek a végződések: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52. 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96. (1 pont)
Az összes képezhető $(n+9)$ jegyű szám: $\frac{(n+9)!}{(n+1)!}$. (1 pont)
A kedvező esetek vizsgálatát két esetre kell bontanunk. Az első, amikor a szám utolsó két számjegyében nem szerepel hármas, ekkor $14\cdot\frac{(n+7)!}{(n+1)!}$ számot képezhetünk. (1 pont)
A második esetben az utolsó két számjegy között van hármas, ekkor $2\cdot\frac{(n+7)!}{n!}$ számot képezhetünk. (1 pont)
Így a kedvező esetek száma: $\frac{2\cdot(n+7)!\cdot(n+1)+14\cdot(n+7)!}{(n+1)!}$ (1 pont)
A valószínűséget felírhatjuk a következő módon:

$$P=\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\frac{2\cdot(n+7)!\cdot(n+1)+14\cdot(n+7)!}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+9)!}=\frac{(n+7)!\cdot(2(n+1)+14)}{(n+9)\cdot(n+8)\cdot(n+7)!}\Rightarrow$$

$$\frac{2n+16}{(n+9)\cdot(n+8)}=\frac{2}{13}$$ (2 pont)

A kifejezést tovább alakítva a következő másodfokú egyenlethez jutunk: $0=n^2+4n-32$, melynek gyökei $n_1=-8$ és $n_2=4$. (1 pont)

A feladat jellegéből adódóan $n_1 = -8$ nem megoldás. **Tehát 4 darab hármast tettünk még a számkártyák közé.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Egy 10 cm oldalú négyzet alapú gúla oldaléleinek hossza 20 cm.

a) Milyen magasan kell elmetszeni a testet az alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a két rész térfogata megegyezzen? (7 pont)

A metszés után keletkezett csonkagúlába olyan gömböt írunk, melynek térfogata maximális.

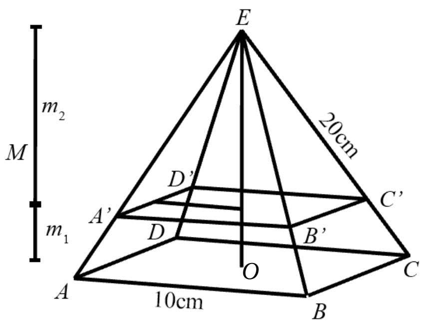
b) Mekkora a gömb térfogata? (4 pont)

Klári néni négyzet alapú gúla, valamint gömb alakú gyertyákat gyárt, összesen 46 darabot. A gyertyákat két, egymás alatti polcon, 1-től 23-ig megszámozott helyeken tartja. Azonban egyik délután az unokája az alsó polcon összekeverte a számokat.

c) Bizonyítsa be, hogyha a felső sorban álló számokból kivonjuk az alattuk állókat, és a különbségeket összeszorozzuk, akkor páros szám lesz a végeredmény! (5 pont)

Megoldás:

a) Ha a metszés után a két rész térfogata megegyezik, akkor az *A'B'C'D'E* gúla térfogata fele az eredeti gúla térfogatának. (1 pont)

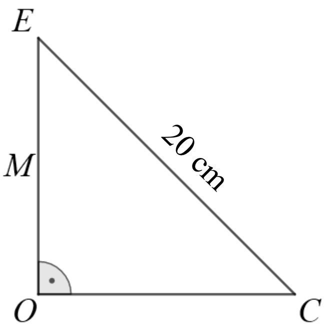


Az eredeti gúla és az *A'B'C'D'E* gúla hasonlóak, ezért kihasználhatjuk, hogy a térfogatok aránya egyenlő a hasonlósági arány köbével. (1 pont)

A fentiek alapján $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2} = \lambda^3 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (1 pont)

$OC = \frac{\sqrt{10^2 + 10^2}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2}$ cm (az alapnégyzet átlójának fele) (1 pont)

OCE háromszögben Pitagorasz-tételt felírva:

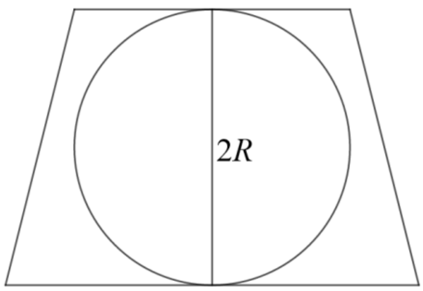


$M^2 + \left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 20 \Rightarrow M = 5\sqrt{14}$ cm (1 pont)

A hasonlóság miatt $m_1 = 5\sqrt{14} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 14,85$ cm (1 pont)

$m_2 = 5\sqrt{14} - 14,85 = 3,86$ cm, **azaz 3,86 cm magasan kell elmetszenünk a gúlát**. (1 pont)

b) A gömb térfogata akkor lesz maximális, ha érinti a csonkagúla alaplapját és fedőlapját. (1 pont)



Ekkor a gömb átmérője megegyezik a csonkagúla magasságával, azaz $2R = 3,86$ cm. (1 pont)

A gömb sugara: $R = 1,93$ cm. (1 pont)

A térfogat: $V = \frac{4 \cdot 1,93^3 \cdot \pi}{3} =$ **30,11 cm³**. (1 pont)

c) Egy szorzat akkor páros, hogyha valamelyik tényezője páros. (1 pont)
Egy különbség akkor páros, ha a kisebbítendő és a kivonandó is páros, vagy páratlan. (1 pont)
A polcokon 12 páratlan és 11 páros szám található. Mivel eggyel több páratlan szám van, mint páros, így a felső polcon biztosan lesz olyan páratlan szám, amely alá szintén páratlan szám kerül. (2 pont)
A két páratlan szám különbsége páros, így a szorzatban biztosan lesz páros tényező, tehát az eredmény is páros lesz. Ezzel az állítást beláttuk. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) Az $y-2=(x-1)^2$ egyenletű parabola P_1 és P_2 pontjaiból az $A(1;2)$ és $B(1;6)$ pontok által határolt szakasz derékszögben látszik.

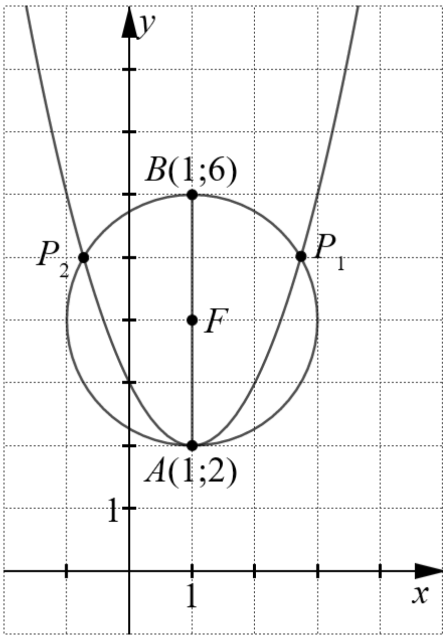
a) Adja meg a P_1 és P_2 pontok koordinátáit! (9 pont)

A parabola, valamint az $\left(1+\sqrt{3};5\right)$ és az $\left(1-\sqrt{3};5\right)$ pontok által meghatározott egyenes egy síkidomot határolnak.

b) Számítsa ki ennek a síkidomnak a területét! (7 pont)

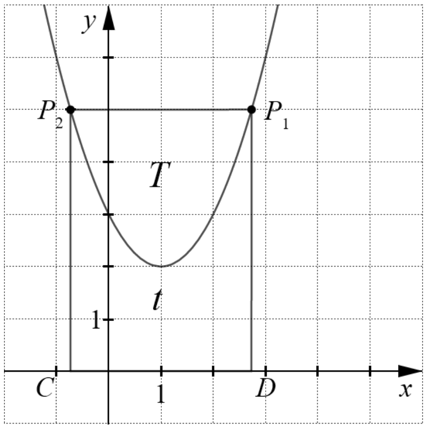
Megoldás:

a) Ahhoz, hogy meghatározzuk azokat a pontokat, amelyekből az AB szakasz derékszög alatt látszik, fel kell írnunk a szakasz Thálesz-körét. (1 pont)
A kör középpontja a szakasz felezőpontja: $F(1;4)$, sugara $r=2$ cm. (1 pont)
A Thálesz-kör egyenlete: $(x-1)^2+(y-4)^2=4$ (1 pont)
A kör és a parabola metszéspontjainak meghatározásához meg kell oldanunk a kör és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszert.
A parabola egyenletét a kör egyenletébe behelyettesítve a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $y^2-7y+10=0$
. (1 pont)
Az egyenlet gyökei $y_1=2$ és $y_2=5$. (1 pont)
Ezután y_1-et visszahelyettesítve az $(1;2)$ pontot kapjuk eredményül. Ez azonban a Thálesz-tétel miatt nem megoldás. (1 pont)



Majd y_2-t visszahelyettesítve: $3=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{3}=|x-1| \Rightarrow x_1=1+\sqrt{3};\ x_2=1-\sqrt{3}$ (2 pont)
Tehát a pontok koordinátái: $\boldsymbol{P_1\left(1+\sqrt{3};5\right)},\ \boldsymbol{P_2\left(1-\sqrt{3};5\right)}$ (1 pont)

b) A síkidom területét (T) úgy tudjuk kiszámolni, hogy a P_1P_2CD téglalap területéből kivonjuk a parabola alatti területet (t) a $\left[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right]$ intervallumon. (1 pont)



A pontok koordinátái: $C\left(1-\sqrt{3};0\right)$, $D\left(1+\sqrt{3};0\right)$, a szakaszok hossza: $CP_2 = DP_1 = 5$, $CD = P_1P_2 = 2\sqrt{3}$ (1 pont)

A téglalap területe: $T_{P_1P_2CD} = 5\cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ te. (1 pont)

A parabola alatti terület: $t = \int\limits_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} x^2 - 2x + 3\, dx =$

$\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} = \frac{7+9\sqrt{3}}{3} - \frac{7-9\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ területegység. (3 pont)

A síkidom területe: $T = T_{P_1P_2CD} - t = \mathbf{4\sqrt{3}}$ **te**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy középiskolában két érettségiző osztály volt 2017-ben. Az A osztály létszáma volt nagyobb, mégpedig a B-ben végzettek $p\%$-ával. Az A osztályban végzettek $\frac{3}{5}$-e, a B osztályban végzettek 70%-a érettségizett emelt szinten matematikából, a többiek történelemből. A tanulók között nem volt olyan, aki két tárgyból érettségizett emelt szinten. Az összes matematikát választó diák a végzettek $r\%$-a.

a) Igazolja, hogy $r = 60 + \frac{1000}{200+p}$! (8 pont)

Az évfolyamról 27-en érettségiztek matematikából, 21-en történelemből emelt szinten. Az általuk elért érdemjegyeket mutatja az alábbi gyakorisági tábla.

	Matematika			**Történelem**		
Érdemjegy	3	4	5	3	4	5
Érettségiző (fő)	16	6	5	10	8	3

b) A matematikából közepest szerző diákok közül legalább hánynak kellett volna 4-est szereznie a többiek változatlan teljesítménye mellett ahhoz, hogy a matematikaérettségi átlaga legalább 3,8 legyen? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a történelemből érettségizett diákok közül véletlenszerűen kiválasztott 2 diák átlaga legalább 4,2? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) Foglaljuk össze az adatokat egy táblázatban! (2 pont)

	A osztály	**B osztály**
Létszám (fő)	$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x$	x
Emelt matek érettségi (fő)	$\frac{3}{5}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x$	$0,7\cdot x$

Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{3}{5}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x+0,7\cdot x=\frac{r}{100}\cdot\left(x+\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x\right)$$ (1 pont)

Az egyenletet egyszerűsíthetjük x-szel, majd rendezés után a következő egyenletet kapjuk: $13000+60p=200r+rp$ (1 pont)

A jobb oldalon kiemelhetünk r-t: $13000+60p=r(200+p)$ (1 pont)

Az egyenletet rendezve: $\frac{13000+60p}{200+p}=r$ (1 pont)

Egészrészleválasztás után kapjuk, hogy $\mathbf{60+\frac{1000}{200+p}=r}$. Ezzel az állítást beláttuk. (2 pont)

b) Jelölje azok számát, akiknek még 4-est kell szerezniük x. Ekkor $16-x$ fő szerzett hármast, és $6+x$ fő négyest.

Felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget: $\frac{3\cdot(16-x)+4\cdot(6+x)+5\cdot5}{27}\geq3,8$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $x\geq5,6$ (1 pont)

Tehát legalább **6 tanulónak kellett volna még négyest szereznie**. (1 pont)

c) Ahhoz, hogy az átlag legalább 4,2 legyen vagy két ötöst, vagy egy ötöst és egy négyest szerző tanulót kell kiválasztani. (1 pont)

Két ötöst szerző tanulót $\binom{3}{2}=3$ féleképpen választhatunk ki. (1 pont)

Egy ötöst és egy négyest szerző tanulót $\binom{8}{1}\cdot\binom{3}{1}=24$ féleképpen választhatunk ki. (1 pont)

A 21 tanulóból kettőt $\binom{21}{2}=210$ módon tudunk kiválasztani. (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P=\frac{24+3}{210}=\mathbf{0,1286}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

Maximális elérhető pontszám: 64 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 115 pont