MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉPSZINT

Logika-Gráfok

A szürkített hátterű feladatrészek nem tartoznak az érintett témakörhöz, azonban szolgálhatnak fontos információval az érintett feladatrészek megoldásához!

1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

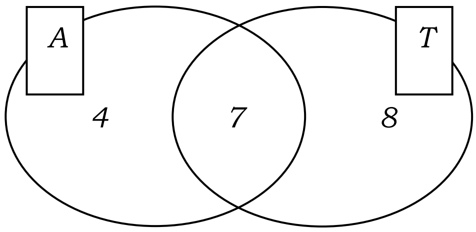
b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)

c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

Megoldás:

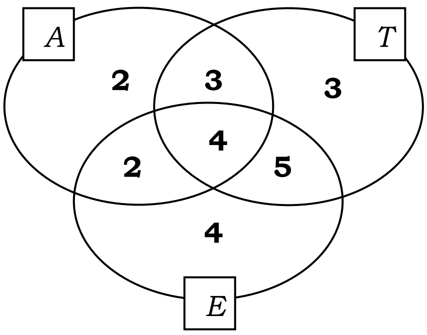
a)



(2 pont)

Legalább az egyikük által észrevett eltérések száma: $4+7+8=19$ (1 pont)
Egyikük sem vett észre $23-19=\mathbf{4}$ eltérést. (1 pont)
(Halmazábra nélkül is felírható a megtalált eltérések száma.)

b)



(7 pont)

c) **Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg.**
VAGY: **Enikő nem minden eltérést talált meg.**
VAGY: **Enikő nem találta meg az összes eltérést.** (2 pont)

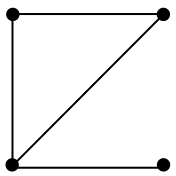
d) A kedvező esetek száma: 14. (1 pont)
Az összes esetek száma: 23. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{14}{23} \approx \mathbf{0,61}$ vagy $61\ \%$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

2) Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak? (2 pont)

Megoldás:

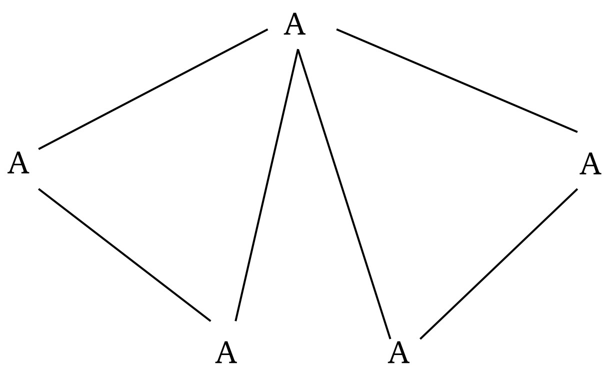
Egy lehetséges ábrázolás:



A gráfnak **4 éle** van. (ábra nélkül is jár a 2 pont) (2 pont)

3) Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek! (3 pont)

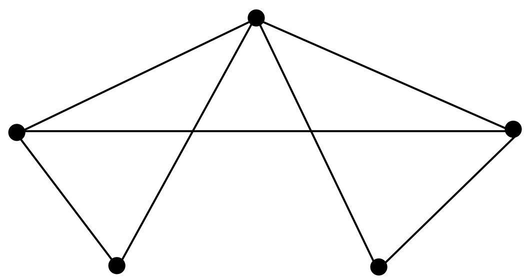
Megoldás:



(3 pont)

4) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

5) **A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.**

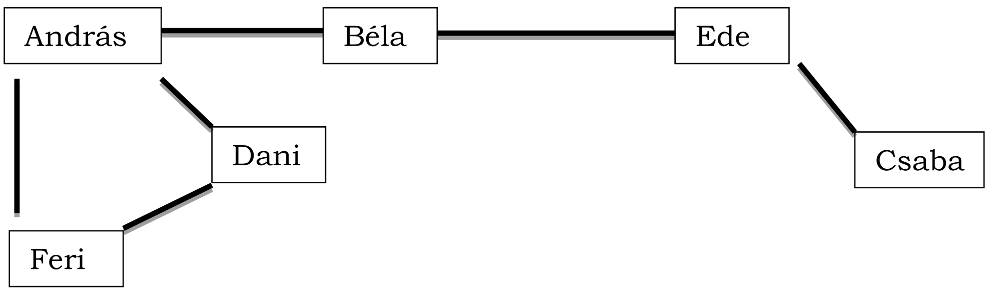
a) **Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket!** **(4 pont)**

b) **Hány mérkőzés van még hátra?** **(3 pont)**

c) **Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?** **(5 pont)**

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) Ha mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor a mérkőzések száma $\binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (2 pont)

6 mérkőzést már lejátszottak, **ezért 9 mérkőzés van még hátra.** (1 pont)

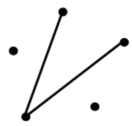
c) Ha Dani az első helyen végez, akkor a többiek $5! = 120$-féleképpen „követhetik”. (2 pont)

Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha Dani második. (2 pont)

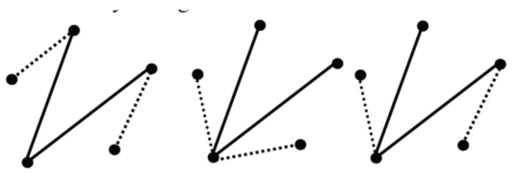
Így a kérdéses lehetőségek száma: **240**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) **Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!** **(2 pont)**



Megoldás:



(2 pont)

7) **Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltessen gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.)** **(2 pont)**

Megoldás:

Például:

(2 pont)

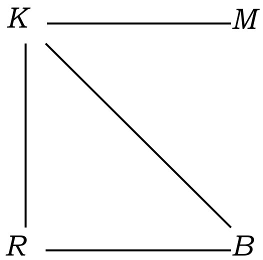
8) **Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai?** **(2 pont)**

Megoldás:

A társaság 12 tagú. (1 pont)
132 SMS-t írtak összesen. (1 pont)

9) **A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábbról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.)**
Rajzolja fel a négytagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját!
(2 pont)

Megoldás:

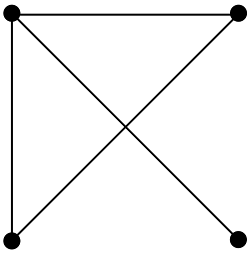


(2 pont)

Összesen: 2 pont

10) **Rajzoljon le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1!** **(2 pont)**

Megoldás:



(2 pont)

11) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

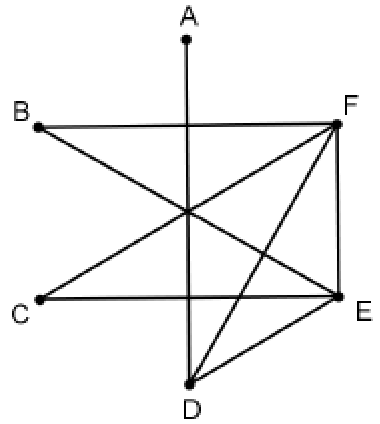
a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! (4 pont)

b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve): (4 pont)



b) Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna, akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna. (3 pont)
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna. (2 pont)
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással. (1 pont)

c) A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk. (2 pont)
Összesen $\left(\frac{6 \cdot 5}{2}\right) = 15$ mérkőzés szükséges (összes eset száma). (2 pont)
Eddig 8 mérkőzés zajlott le, tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma). (2 pont)
A keresett valószínűség $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}} (\approx \mathbf{0{,}47})$ (1 pont)

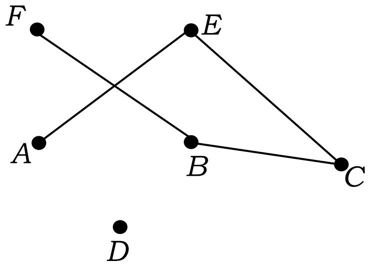
Összesen: 17 pont

12) Rajzoljon egy gráfot, melynek 5 csúcsa és 5 éle van, továbbá legalább az egyik csúcsának a fokszáma 3. (2 pont)

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő gráf. (2 pont)

13) **Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzoljon be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki! A berajzolt éleket két végpontjukkal adja meg!** **(2 pont)**

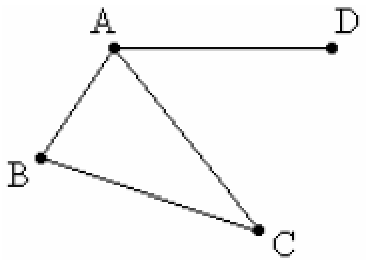


Megoldás:

A berajzolt élek: ***A-D*** és ***D-F.*** (2 pont)

14) **Egy álláshirdetésre négyen jelentkeznek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Az adott időben megjelennek a vállalatnál, s akkor kiderül, hogy közülük hárman, Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri, ők régebben egy kosárlabdacsapatban játszottak. Szemléltesse az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.)** **(2 pont)**

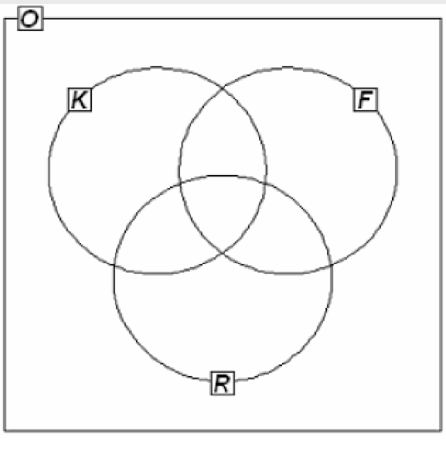
Megoldás:



(2 pont)

15) **Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.**

a) **Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat!** **(4 pont)**



1. ábra

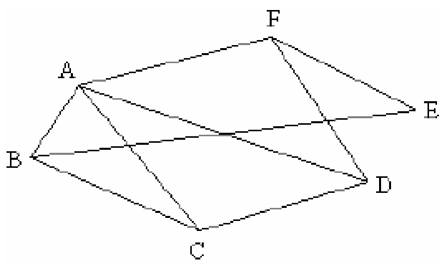
b) **Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!**

A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére.

(2 pont)

c) **A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót!** **(3 pont)**

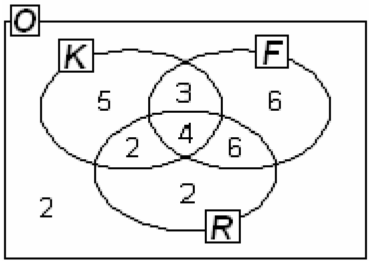
d) **Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!)** **(3 pont)**



2. ábra

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) **A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére**. *VAGY:* **A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére**. (2 pont)

c) Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{5!} =$ **11628-féleképpen** lehet kiválasztani.

(3 pont)

d) A mérkőzések száma összesen: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (1 pont)

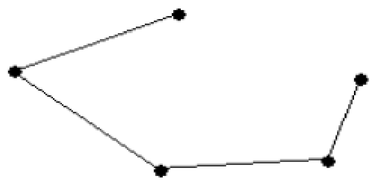
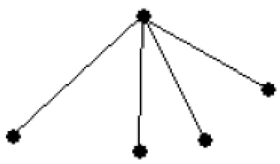
Eddig lejátszottak 9 mérkőzést. (1 pont)
6 mérkőzés van még hátra. (1 pont)

Összesen: 12 pont

16) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelynek 4 éle van! (2 pont)

Megoldás:

Több megoldás is elképzelhető, például:

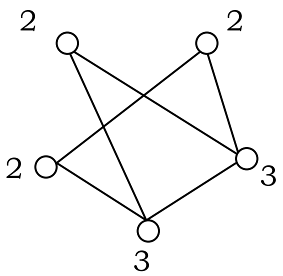
(2 pont)
Összesen: 2 pont

17) Rajzoljon egy olyan 5 csúcsú gráfot, melyben a csúcsok fokszámának összege 12. (2 pont)

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő gráf. (2 pont)

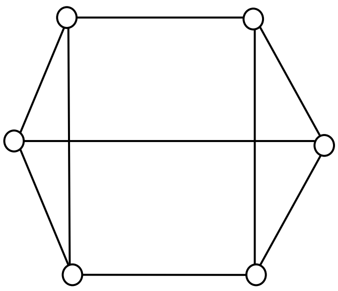
Például:



18) Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti! (2 pont)

Megoldás:

Egy megfelelő gráf például:



(2 pont)

19) Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak! (2 pont)

Minden érettségi feladat egyszerű.

a) Minden érettségi feladat bonyolult.
b) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
c) Sok érettségi feladat bonyolult.
d) Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű.

Megoldás:

b) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű. (2 pont)

Összesen: 2 pont

20) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is

megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.

Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. (2 pont)

Megoldás:

a) A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x, a mikrohullámú sütővel rendelkezők számát $2x$. (1 pont)
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek:
$2x + x - 63 = 141$, (2 pont)
amiből $x = 68$. (1 pont)
Nincs mikrohullámú sütője $150 - 2 \cdot 68 = 14$ megkérdezettnek, (1 pont)
ők az összes megkérdezett kb. **9,3%-át** jelentik. (1 pont)

b) Az egy háztartásban található számítógépek számának átlaga:
$\frac{3 \cdot 0 + 94 \cdot 1 + 89 \cdot 2 + 14 \cdot 3}{200} =$ (1 pont)

$= \mathbf{1,57}$. (1 pont)

A medián **2**, (1 pont)

a módusz **1**. (1 pont)

c) Az állítás tagadásai: **C** és **D.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

21) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)

b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

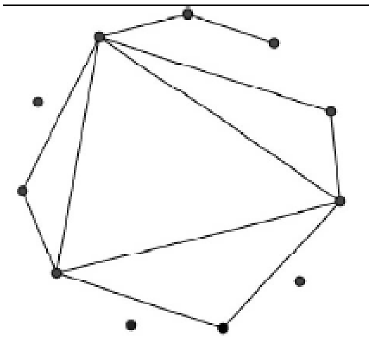
Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

Megoldás:



a) Több lehetőség is van, például: (3 pont)

b) Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak, (1 pont)
összesen **11**. (1 pont)

c) A vizsgázó által megadott számok egyetlen módusza 2, (1 pont)
mediánja 3, (1 pont)
átlaga 4, (1 pont)
terjedelme 5. (1 pont)
Egy lehetséges megoldás például 2; 2; 2; 2; 2; 3; 6; 6; 6; 6; 7. (1 pont)

d) Annak a valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest $(1-0,9)=0,1$. (1 pont)
Összesen három lehetőséget kell figyelembe venni. (1 pont)
Pontosan egyszer talál be, és kétszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{1}\cdot 0,9\cdot 0,1^2(=0,027)$. (1 pont)
Pontosan kétszer talál be, és egyszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{2}\cdot 0,9^2\cdot 0,1(=0,243)$. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy mindháromszor betalál: $0,9^3(=0,729)$. (1 pont)
A keresett valószínűség ezek összege, (1 pont)
azaz **0,999**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

22) **"Minden szekrény barna."**
Válassza ki az alábbiak közül annak a mondatnak a betűjelét, amelyik tagadása a fenti kijelentésnek!
A: Van olyan szekrény, amelyik nem barna.
B: Nincs barna szekrény.
C: Van olyan szekrény, amelyik barna.
D: Pontosan egy szekrény barna. **(2 pont)**

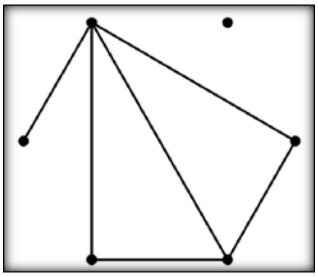
Megoldás:

A (2 pont)

23) Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4. **(2 pont)**

Megoldás:

Például: (2 pont)



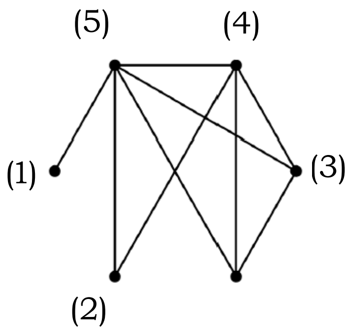
24) E
gy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismertségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: $5,4,3,2,1$.

a) Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismertségi viszonyait! **(2 pont)**

b) Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?: **(1 pont)**

Megoldás:

a)



(2 pont)

b) A hatodik főnek az ábráról leolvasva **3** ismerőse van. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) Egy fiókban néhány sapka van. Tekintsük a következő állítást: „A fiókban minden sapka fekete.” Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!

A: A fiókban minden sapka fehér.

B: A fiókban nincs fekete sapka.

C: A fiókban van olyan sapka, amely nem fekete.

D: A fiókban nem minden sapka fekete. **(2 pont)**

Megoldás:

A helyes tagadás $\boldsymbol{C}$ és $\boldsymbol{D}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont